

Okladkę projektował: *Dariusz Litwiniec*
 Redaktor merytoryczny: *mgr inż. Elżbieta Gawin*
 Redaktor techniczny: *Jerzy Korpalski*
 Korekta: *Alina Podmiotko*

Zwięzłe i praktyczne wprowadzenie w dziedzinę telekomunikacji, zawierające podstawy matematyczne i niezbędną wiedzę z zakresu teorii sygnałów, szumów, modulacji i cyfrowej transmisji sygnałów. Zawiera wiele przykładów, pytań i zadań wraz z odpowiedziami, obejmujących podstawowe pojęcia z telekomunikacji, podstaw teorii szumów, podstawowe metody modulacji amplitudy i kąta oraz zwielokrotniania z podziałem częstotliwościowym, telekomunikacji cyfrowej w pasmie podstawowym, zwielokrotnianie z podziałem czasowym oraz modulację impulsowo-kodową i cyfrową. Odbiorcy: uczniowie szkół elektronicznych, studenci kursów inżynierskich wyższych uczelni technicznych oraz wszyscy zainteresowani telekomunikacją.

ISBN 83-206-1337-X

Warszawa 2000

Wydawnictwa Komunikacji i Łączności sp. z o.o.
 ul. Kazimierzowska 52, 02-546 Warszawa
 tel. (0-22) 849-27-51; fax (0-22) 849-23-22
 Dział handlowy tel. (0-22) 849-27-51 w. 555
 tel./fax (0-22) 849-23-45
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową książek
 Księgarnia firmowa w siedzibie wydawnictwa
 tel. (0-22) 849-20-32, czynna pon.–pt. 10.00–18.00
 e-mail: wkl@wkl.com.pl
Oferta WKŁ w Internecie <http://www.wkl.com.pl>

Wydanie 1. Warszawa 2000.

Skład, łamanie, diapozytywy: FOTOTYPE
 Warszawa, ul. Ślaska 21b
 Druk i oprawa: Zakłady Graficzne im. KEN S.A.
 Bydgoszcz, ul. Jagiellońska 1

Przedmowa	7
Podziękowania	9
1 Wstęp	11
1.1 Telekomunikacja: definicja	11
1.2 Rys historyczny	12
1.3 Model systemu telekomunikacyjnego	15
1.4 Klasyfikacja sygnałów	16
1.5 Podsumowanie	18
2 Przetwarzanie sygnałów	19
2.1 Widma częstotliwościowe	19
2.2 Szeregi Fouriera	22
2.3 Transformata Fouriera	30
2.4 Odwrotna transformata Fouriera	40
2.5 Splot	41
2.6 Filtry analogowe	48
2.7 Wstęp do cyfrowego przetwarzania sygnałów	52
2.8 Filtry cyfrowe	57
2.9 Podsumowanie	61
Zadania	62
Literatura	66
3 Szumy	67
3.1 Wiadomości wstępne o szumach	67
3.2 Szumy elementów elektronicznych	68
3.3 Skuteczna temperatura szumów	76
3.4 Szumy w systemach radioelektronicznych	78
3.5 Stosunek sygnał-szum	81
3.6 Współczynnik szumów	84
3.7 Podsumowanie	88
Zadania	89
Literatura	90
4 Modulacja	91
4.1 Modulacja amplitudy	91

4.2	Modulacja kąta	106
4.3	Zwielokrotnianie z podziałem częstotliwościowym	116
4.4	Porównanie metod modulacji	118
4.5	Podsumowanie	124
	Zadania	125
	Literatura	126
5	Telekomunikacja cyfrowa	127
5.1	Transmisja w pasmie podstawowym	127
5.2	Zwielokrotnianie z podziałem czasowym	141
5.3	Modulacja impulsowo-kodowa	143
5.4	Modulacja cyfrowa	162
5.5	Podsumowanie	175
	Zadania	176
	Literatura	177
	Dodatek A Rozwiązania zadań	178
	Dodatek B Szeregi Fouriera	183
	Dodatek C Transformaty Fouriera	187
	Dodatek D Funkcje Bessela	190
	Dodatek E Normalna funkcja błędu	193
	Indeks	196

Ta publikacja została napisana dla osób zainteresowanych głębiej zagadnieniami telekomunikacji. Obejmuje ona takie podstawowe zagadnienia jak sygnały, szумы, modulacja i transmisja cyfrowa, co umożliwi dalsze studiowanie systemów telekomunikacyjnych. Stosowana tu matematyka jest wprowadzana w sposób przyjazny i dokładne wyjaśnienia podano tam, gdzie jest to konieczne.

Każdy rozdział zaczyna się od wyliczenia jego tematyki i celu w formie streszczenia, a kończy podsumowaniem i serią zadań sprawdzających. Do każdego rozdziału dołączono też przykłady z rozwiązaniami oraz ćwiczenia sprawdzające do samodzielnego rozwiązywania, pozwalające Czytelnikowi sprawdzić uzyskany postęp wiedzy.

Rozdział 1 stanowi wprowadzenie w fascynujący świat telekomunikacji. Definiuje on samo pojęcie „telekomunikacja”, ilustrując jego istotę na tle historycznym. Model systemu telekomunikacyjnego służy tu do zdefiniowania najważniejszej terminologii oraz opisu podstawowych elementów tego systemu. Wprowadzono także podstawowe właściwości sygnałów, omawiając ich podział na sygnały analogowe i cyfrowe.

W rozdziale 2 rozwinęto dalej problematykę sygnałową, wprowadzając podstawowe metody przetwarzania sygnałów stosowane przy nadawaniu i odbiorze. Dosyć szczegółowo zajęto się tu związkami pomiędzy czasową i częstotliwościową (widmową) reprezentacją sygnałów. Prowadzi to w naturalny sposób do zastosowania szeregów Fouriera celem wyznaczania widma sygnałów okresowych w dziedzinie czasu. Analogicznie pokazano, jak za pomocą transformaty Fouriera wyznacza się widma sygnałów nieokresowych. Przedstawiono też zastosowanie odwrotnej transformaty Fouriera dla wyznaczania przebiegu czasowego sygnału na podstawie jego widma. Dosyć trudne pojęcie splotu zostało jasno i szczegółowo przedstawione, jako alternatywna, prosta technika mnożenia dwu sygnałów. Filtry analogowe posłużyły tu do opisu jednej z najbardziej podstawowych metod przetwarzania sygnałów. Rozdział kończy się wstępnym opisem problemu cyfrowego przetwarzania sygnałów. Przedstawiono w nim kluczowe pojęcia próbkowania i filtracji cyfrowej.

Rozdział 3 zawiera standardowe ujęcie zagadnienia szumów w systemach telekomunikacyjnych. Zaczyna się on od omówienia podstawowych źródeł i rodzajów szumu. Dosyć szczegółowo potraktowano tu szумы wprowadzane przez elementy

elektroniczne. Podano koncepcję skutecznej temperatury szumów, jako parametru służącego do oceny szumu wnoszonego do systemu przez jego podsystemy składowe. Omówiono szumy spotykane w systemach łączności radiowej. Zdefiniowano też stosunek sygnału do szumu, będący podstawową miarą jakości systemu telekomunikacyjnego, podając odnośne przykłady numeryczne. Przedstawiono wreszcie współczynnik szumów, będący alternatywnym parametrem w stosunku do skutecznej temperatury szumów.

W rozdziale 4 zajęto się modulacją, procesem spotykanym w wielu systemach telekomunikacyjnych. Modulacja stanowi proces wiązania sygnału informacyjnego z innym sygnałem zwanym falą nośną i jest stosowana, aby umożliwić radiokomunikację. W tym rozdziale ograniczono się do modulacji analogowej, pozostawiając sygnały cyfrowe do rozpatrzenia w rozdziale następnym. Wprowadzono modualcję amplitudy i modulację kąta, przy czym ta ostatnia może występować w formie modualcji fazy lub modulacji częstotliwości. Skoncentrowano się na tej ostatniej, gdyż jest znacznie częściej używana w praktyce. Przedstawiono także stosowaną w środowisku wielokanałowym koncepcję rozdzielania kanałów w częstotliwości, znaną jako zwielokrotnianie z podziałem częstotliwościowym. Rozdział kończy się zwięzłym porównaniem poszczególnych metod modulacji pod względem ich właściwości szumowych i wymaganej szerokości zajmowanego pasma częstotliwości.

Rozdział 5 poświęcony jest wyłącznie telekomunikacji cyfrowej. W miarę gwałtownego rozwoju telekomunikacji komputerowej, sygnały występują głównie w postaci cyfrowej i dlatego cyfrowe systemy transmisyjne są obecnie znacznie bardziej istotne niż systemy analogowe, jakie dominowały w telekomunikacji do lat 70. Na początku rozdziału rozpatrzono problem minimalnej szerokości pasma, niezbędnej dla przesyłania sygnału z pasma podstawowego. Dalej przeanalizowano wpływ szumów na tego rodzaju sygnały, a w szczególności na prawdopodobieństwo występowania błędnego odbioru pojedynczego bitu. Zostało tu sformułowane twierdzenie Shannona o pojemności kanału, określające maksymalną szybkość, z jaką bity mogą być przesyłane przez kanał o danej szerokości pasma i danym stosunku sygnału do szumu. Zwielokrotnianie z podziałem czasowym zostało tu przedstawione, jako alternatywny względem zwielokrotniania z podziałem częstotliwościowym sposób rozdzielania kanałów w czasie. Modulacja impulsowo-kodowa stanowi dobrą metodę wspólnego wykorzystywania kanału w systemie ze zwielokrotnianiem z podziałem czasowym. Każdy kanał transmituje okresowo ciąg bitów zwany kodem impulsowym, reprezentujący próbkę sygnału z pasma podstawowego. Wyjaśniono tu pojęcie błędu kwantowania i wprowadzono parametr zwany stosunkiem sygnału do szumu kwantyzacji, będący w omawianej klasie systemów odpowiednikiem „stosunku sygnał-szum”. Dalej przedstawiono podstawowe rodzaje modulacji cyfrowej stosowane w przypadku modemów, a mianowicie kluczkowanie z przesuwem amplitudy, kluczkowanie z przesuwem częstotliwości, kluczkowanie z przesuwem fazy i kwadraturową modulację amplitudy. Systemy te następnie porównano.

Książka zawiera dodatek, w którym podano odpowiedzi do wybranych ćwiczeń przeznaczonych do samodzielnego rozwiązywania oraz zadań kończących poszczególne rozdziały. W dodatku umieszczono także szeregi Fouriera, transformaty Fouriera, tablice funkcji Bessela oraz tablice normalnej funkcji błędu.

Podziękowania

Autor pragnie podziękować osobom, z którymi przeprowadził liczne owocne i konstruktywne dyskusje. Są to: Mike Duck z firmy Nortel PLC oraz Tony Drake z University of North London. Moja wdzięczność należy się także pani Pat Prigmore, za jej wkład w opracowanie pierwszej wersji manuskryptu książki. Dziękuję również redaktorowi Christopherowi Glennie, który opiekował się tą pracą z ramienia wydawnictwa Prentice Hall, oraz licznyim recenzentom roboczych wersji pracy, którzy wnieśli wartościowy wkład w opracowanie ostatecznego tekstu książki.

Zdefiniowano termin telekomunikacja, i wyjaśniono istotę procesu przekazywania informacji. Przedstawiono też krótką historię telekomunikacji, celem zilustrowania rozmaitych form telekomunikacji i ich podstawowych właściwości. Pokazano metodę klasyfikacji fal radiowych w zależności od częstotliwości i długości fali, ich zasięg oraz rodzaje oferowanych usług. Wprowadzono model procesu telekomunikacyjnego celem zdefiniowania jego podstawowych elementów. Sygnały mogą być sklasyfikowane jako sygnały z czasem ciągłym lub dyskretnym, analogowe lub cyfrowe. Przedstawiono też odpowiednie różnice między nimi.

1.1 TELEKOMUNIKACJA: DEFINICJA

Telekomunikację można zdefiniować jako proces przesyłania informacji między dwoma użytkownikami lub większą ich liczbą. Proces ten może być zarówno jednokierunkowy, jak i dwukierunkowy. Użytkownikiem może być człowiek albo maszyna, bądź też jedno i drugie.

Jakie cechy powinna mieć informacja, aby mogła być przesyłana? Weźmy przykładowo pod uwagę dobrze nam znany system telekomunikacyjny, a mianowicie telewizję. Telewizja jest o tyle podobna do kinematografii, iż w obu przypadkach zachodzi sekwencyjna transmisja szeregu obrazów lub ramek, przy czym typowa szybkość wynosi 25 obrazów na sekundę. Informacja jaką należy przesyłać dla każdej ramki sprowadza się w zasadzie do luminancji, koloru oraz pozycji każdego punktu w obrębie ramki (ekranu). Do tego dochodzi ponadto transmisja dźwięku. W rozpatrywanym przypadku systemu telewizyjnego trzeba więc przesyłać trzy rodzaje informacji: światło, pozycję i dźwięk.

Systemy telekomunikacyjne operują informacją w postaci **sygnału**. W nowoczesnej telekomunikacji rolę tę pełnią głównie sygnały elektroniczne. Mimo to jednak światło, dźwięk, informacja przestrzenna i wiele innych często spotykanych źródeł przesyłanych informacji, nie są sygnałami elektrycznymi. Z tego względu potrzebne są **przetworniki** służące do przetwarzania sygnału informacyjnego na postać elektryczną i na odwrót. Takimi przetwornikami w systemach dźwiękowych są mikrofony i głośniki. W odbiornikach telewizyjnych dla odtwarzania kolorowego obrazu używa się kineoskopów.

1.2 RYS HISTORYCZNY

Wspomnieliśmy już o dwu rodzajach sygnałów wykorzystywanych w telekomunikacji, lecz istnieje wiele innych. W tablicy 1.1 zebrano w porządku chronologicznym najważniejsze wynalazki, stanowiące kamienie milowe na drodze rozwoju telekomunikacji. Tablica daje zarazem przegląd spotykanych typów sygnałów i systemów. Dawne systemy telegraficzne opierały się na ręcznym przekazywaniu dwu stanów napięciowych, dla przykładu napięcia dodatniego i ujemnego. Kombinacje tych stanów mogły służyć do tworzenia pewnej liczby słów kodowych, z których każde mogło reprezentować jednostkę informacji, a mianowicie literę alfabetu lub cyfrę. Przykładem takiego kodu jest kod Morse’a. Pierwsze systemy telegraficzne były co prawda zdolne do przekazywania informacji na dosyć duże odległości wielu kilometrów, lecz charakteryzowały się niewielką szybkością działania. Zakres częstotliwości niezbędny do przesyłania sygnałów telegraficznych z taką szybkością wynosił od kilkudziesięciu do kilkuset herców.

Telegraficzne systemy telekomunikacyjne używane są do dziś dnia. Znajdujemy je głównie w takich zastosowaniach jak radiokomunikacja morska, gdzie oczywiście nie używa się już transmisji przewodowej z ubiegłego stulecia. Występują one także w systemach teleksowych, które podobnie do systemów telefonicznych są sieciami z wybieraniem (ang. *dial-up systems*). W pierwszych systemach teleksowych stosowano dalekopisy, umożliwiające jednocześnie pisanie wiadomości na jednej maszynie do pisania i drukowanie tej wiadomości na papierze za pomocą innej, oddalonej maszyny tego samego typu. Teleks używany dzisiaj funkcjonuje jako aplikacja na platformie PC (komputera osobistego). Systemy teleksowe są nadal doceniane w tych zastosowaniach gdzie nowoczesne sieci komputerowe, takie jak internet, nie są dostatecznie rozpozszechnione. Typowa szybkość działania, osiągalna dzisiaj z użyciem transmisji zautomatyzowanej, jest około pięciu znaków alfanumerycznych na sekundę i nieco mniejsza z użyciem ręcznej klawiatury.

Kolejnym ważnym osiągnięciem było wynalezienie telefonu przez Bella w roku 1876. Systemy telefoniczne korzystały wówczas z łączności przewodowej, gdyż radio było jeszcze w dziecięcym okresie swego rozwoju. Zakres częstotliwości głosu ludzkiego, a więc i sygnałów elektrycznych służących do jego przesyłania, wynosi w przybliżeniu od 100 Hz do 10 kHz, czyli o rząd wielkości więcej, niż w przypadku sygnałów

Tablica 1.1 NAJWAŻNIEJSZE ETAPY ROZWOJU TELEKOMUNIKACJI

Rok	Wydarzenie
1838	Wynalezienie telegrafu (Samuel Morse)
1876	Wynalezienie telefonu (Alexander Graham Bell)
1897	Wynalezienie telegrafu bez drutu (Guglielmo Marconi)
1906	Trioda próżniowa (Lee De Forest)
1938	Pierwsza rozgłośnia telewizyjna, Alexander Palace, Londyn
1940 ÷ 5	Rozwój radaru
1948	Wynalazek tranzystora
1959	Wynalezienie obwodów scalonych (IC)
1962	Wystrzelenie satelity tekekomunikacyjnego Telstar. Początki telewizji o zasięgu światowym
1968	Początki telekomunikacji światłowodowej

Tablica 1.2 KLASYFIKACJA FAL RADIOWYCH

Pasmo	Zakres częstotliwości	Długości fal	Zasięg	Zastosowanie
VLF	3 ÷ 30 kHz	100 ÷ 10 km	Światowy	Telekomunikacja dalekiego zasięgu, nawigacja, wolne przesyłanie danych
LF	30 ÷ 300 kHz	10 ÷ 1 km	Światowy	Jak VLF
MF	0,3 ÷ 3 MHz	1 ÷ 0,1 km	Setki kilometrów	Radiofonia, radiokomunikacja morska
HF	3 ÷ 30 MHz	100 ÷ 10 m	Światowy przy wielokrotnych odbiciach	Radiokomunikacja dalekiego i średniego zasięgu, radiofonia
VHF	30 ÷ 300 MHz	10 ÷ 1 m	Optyczny	Radiokomunikacja krótkiego zasięgu (paging, audio i TV); średniego zasięgu przy odbiciach troposferycznych; radiokomunikacja ruchoma
UHF	0,3 ÷ 3 GHz	1 ÷ 0,1 m	Optyczny	Jak dla VHF; telekomunikacja satelitarna
SHF	3 ÷ 30 GHz	10 ÷ 1 cm	Optyczny	Krótkiego zasięgu, naziemna, satelitarna, ruchoma i radar
EHV	30 ÷ 300 GHz	1 ÷ 0,1 cm	Optyczny	Łączy naziemne

telegraficznych. Zasięg telefonu jest ograniczony z uwagi na to, że sygnały elektryczne ulegają osłabieniu, czyli **tłumieniu** wraz z odległością. Nieco później, bo w roku 1906, wynalazek elektronicznego wzmacniacza sygnałów na lampach elektronowych (a po roku 1948 na tranzystorach) umożliwił transmisję na duże odległości tak, jak np. za pośrednictwem podmorskich kabli transatlantyckich.

Eksperymenty Marconiego z końca XIX wieku otworzyły drogę do transmisji, najpierw sygnałów telegraficznych, a później mowy na odległości nieporównanie większe od tych, jakie uzyskiwano za pomocą łączności przewodowej. Sygnały radiowe były już regularnie przesyłane przez Atlantyk. Na pewnych częstotliwościach była już wówczas możliwa transmisja na prawdziwie globalną skalę.

Tablica 1.2 ilustruje klasyfikację poszczególnych zakresów fal elektromagnetycznych, wraz z podaniem ich częstotliwości i długości fali. Zamieszczono tu także uzyskiwane zasięgi transmisji oraz pewne typowe zastosowania.

Długość fali jest bezpośrednio zależna od częstotliwości, jak to ilustruje przykład.

PRZYKŁAD 1.1

Wyznaczyć długość fali o częstotliwości 20 MHz.

ROZWIĄZANIE

Szybkość propagacji fali elektromagnetycznej w próżni wynosi 3×10^8 m/s i jest zwykle oznaczana symbolem *c*. (Tę samą wartość przyjmuje się zwykle dla atmosfery ziemskiej, choć w praktyce szybkość ta jest nieco mniejsza.)

$$c = \frac{f}{\lambda} \quad (1.1)$$

$$\lambda = \frac{f}{c} \quad (1.2)$$

Otrzymujemy:

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{20 \times 10^6} = 15 \text{ m} \quad (1.3)$$

Ćwiczenie sprawdzające 1.1 Pewna fala radiowa ma długość 40 cm. Wyznaczyć jej częstotliwość.

Po rozpowszechnieniu się telegrafu, telefonu i radia, z których dwa ostatnie wykorzystywały szeroko zjawisko wzmacniania, następnym kamieniem milowym stało się wynalezienie telewizji w 1938 roku. Sygnał telewizyjny wytwarzany przez kamerę zawiera składowe o częstotliwościach do kilku MHz. Sposób transmisji stosowany w telewizji jest w zasadzie podobny jak w przypadku innych sygnałów, gdyż transmisja radiowa tego sygnału odbywa się za pomocą fali nośnej wielkiej częstotliwości. Jak zostanie wyjaśnione w rozdziale 4, aby system pracował prawidłowo, częstotliwość nośna powinna być wiele razy większa od częstotliwości transmitowanego sygnału. Postęp polega na tym, że z powodu dużych częstotliwości sygnałów telewizyjnych (które są o dwa rzędy wielkości większe, niż w poprzednich systemach) częstotliwość nośna musi leżeć w pasmie VHF (bardzo wielkich częstotliwości) lub wyższym. Oznacza to, iż zakres częstotliwości pracy odnośnych urządzeń radiowych przewyższa znacznie dotychczas stosowany.

W czasie drugiej wojny światowej postępy dokonane w dziedzinie techniki wielkich częstotliwości w związku z rozwojem telewizji zostały wykorzystane dla RADARU (ang. Radio Detection And Ranging), a szczególnie radaru lotniczego. Choć w radarze stosowano początkowo fale radiowe z zakresów VHF i UHF (ultra wielkie częstotliwości), to wynalazek radaru spowodował rozwój techniki jeszcze większych częstotliwości, zwanych **mikrofalamami**. Chodzi tu o częstotliwości leżące w zakresie powyżej około 500 MHz, kiedy długość fali staje się rzędu decymetrów lub mniej i stąd wywodzi się ich nazwa.

Około roku 1950 możliwa już była transmisja mowy na duże odległości. Powszechne stały się transatlantyckie rozmowy telefoniczne. Transmisja sygnału mowy może się odbywać albo za pomocą kabla podmorskiego tam, gdzie to możliwe, lub przy zastosowaniu łączy radiowych. Kablowa transmisja długodystansowa sygnału telewizyjnego okazuje się niemożliwa ze względu na wielkie częstotliwości, gdyż sygnał taki odznaje silnego tłumienia wraz z odległością. Transmisja telewizyjna na zakresach VHF i UHF zachodzi, jak zapisano w tablicy 1.2, na zasadzie widoczności bezpośredniej. Nawet używając wysokich masztów antenowych zasięg jest tu ograniczony do około 50 km.

W latach 60. wraz z umieszczeniem na orbicie okołoziemskiej satelity Telstar, a następnie dalszych satelitów telekomunikacyjnych, telewizyjna transmisja dalekiego zasięgu stała się rzeczywistością. Było to możliwe po wynalezieniu układów scalonych

(IC), dzięki czemu zmalały rozmiary fizyczne i ciężar systemów elektronicznych, a także dzięki postępom techniki raketowej, które umożliwiły wysyłanie na orbitę coraz większych ładunków użytecznych. Tego typu systemy satelitarne są zdolne przesyłać szeroki zakres częstotliwości sygnału telewizyjnego i pełnić rolę przekaźników międzykontynentalnych. Zapewniają one niemal globalne pokrycie.

Środowisko transmisji światłowodowej, będącej alternatywą dla przewodów metalowych, zwykle wykonanych z miedzi, jest zdolne do transmisji wszystkich sygnałów, z jakimi mamy dzisiaj do czynienia, włącznie z sygnałami telewizyjnymi. Dzięki temu rozwija się zdrowa konkurencja w dziedzinie transmisji dalekiego zasięgu pomiędzy łącznością satelitarną, a podwodnymi kablami światłowodowymi.

W latach 1970 tradycyjna telekomunikacja została zdominowana przez układy VLSI (bardzo wielkiej skali integracji) zdolne do wykonywania coraz bardziej złożonych operacji przetwarzania sygnałów. Przykładowo, centrale telefoniczne stały się wielkimi układami przełączającymi sterowanymi komputerowo. Tym sposobem następowała konwergencja między telekomunikacją a techniką komputerową. Jednocześnie komputery zwiększały stale swe moce obliczeniowe, a sieci komputerowe były wprowadzane na szeroką skalę.

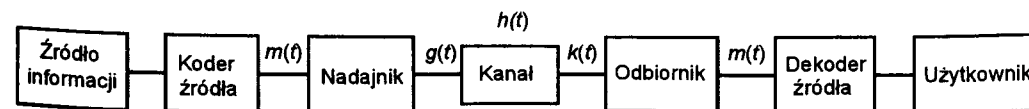
Postęp, jaki następował w latach 70., legł u podstaw rozwoju w latach 1980. Sieci telefonii ruchomej, oparte na zasadzie radiowych sieci komórkowych stały się elementem życia codziennego. Było to możliwe, gdyż stał się osiągalny wysoki stopień inteligencji, co umożliwiło realizowanie skomplikowanych zadań na poziomie samych mikrotelefonów komórkowych, kontrolerów stacji bazowych oraz, co oczywiste, rozległej struktury przełączającej, jakiej tego rodzaju systemy wymagają.

Lata 1990. są latami dalszego intensywnego rozwoju – od radiokomunikacji ruchomej po telekomunikację osobistą. Po osiągnięciu pełnego rozwoju, sieci telekomunikacji osobistej (PCN) zapewnią każdemu użytkownikowi całą gamę usług telekomunikacyjnych, niezależnie od czasu i jego miejsca pobytu. Wszystko, czego taki rodzaj telekomunikacji wymaga, zostanie zapewnione w sposób globalny na całkowicie mobilnych podstawach i przy zastosowaniu uniwersalnej techniki dostępu oraz uniwersalnego systemu numerycznego.

1.3 MODEL SYSTEMU TELEKOMUNIKACYJNEGO

Obecnie przedstawimy model systemu telekomunikacyjnego. Jest on użyteczny zarówno dla omówienia podstawowych elementów systemu telekomunikacyjnego, jak i wprowadzenia ogólnej terminologii, jakiej będziemy używać w dalszych rozdziałach tej książki.

Rysunek 1.1 ilustruje prosty model systemu telekomunikacyjnego. W wielu systemach informacja źródłowa (oraz dostarczana odbiorcy) występuje w innej postaci



Rys. 1.1 System telekomunikacyjny

niż elektryczna. Jak już stwierdziliśmy, informacja dźwiękowa występuje w postaci drgań mechanicznych. W telewizji mamy natomiast do czynienia głównie z energią świetlną. **Koder źródła** czyli **przetwornik**, służy do przetwarzania informacji źródłowej do postaci elektrycznej. Ta elektryczna postać informacji stanowiąca wiadomość jest nazywana **sygnałem informacyjnym**. Będziemy go odąd opisywać w postaci funkcji czasu $m(t)$. Podobnie w odbiorniku jest stosowany dekoder źródła czyli przetwornik, przekształcający elektryczny sygnał informacyjny na inną postać energii, celem odtworzenia informacji oryginalnej. Do takich szeroko stosowanych przetworników należą: kamera telewizyjna i głośnik. Odpowiedź czasowa kanału jest opisywana przez funkcję $h(t)$, a funkcja $k(t)$ opisuje sygnał wyjściowy kanału.

Nadajnik służy do przekształcania sygnału informacyjnego do postaci akceptowanej przez kanał, którą będziemy oznaczać przez $g(t)$; **kanał** jest to droga lub łącze, występujące między nadajnikiem i odbiornikiem. Jak już wspomnieliśmy, kanał może być typu metalicznego, optycznego lub radiowego. **Odbiornik** spełnia funkcję odwrotną niż nadajnik, odtwarzając sygnał informacyjny.

Opisany model jest wyidealizowany w tym sensie, że każdy jego element jest idealny i nie wprowadza energii zewnętrznej, która jest traktowana jako **szum**, będący przedmiotem szczegółowych rozważań w rozdziale 3. Zakłada się także brak **zakłóceń** pochodzących od innych źródeł.

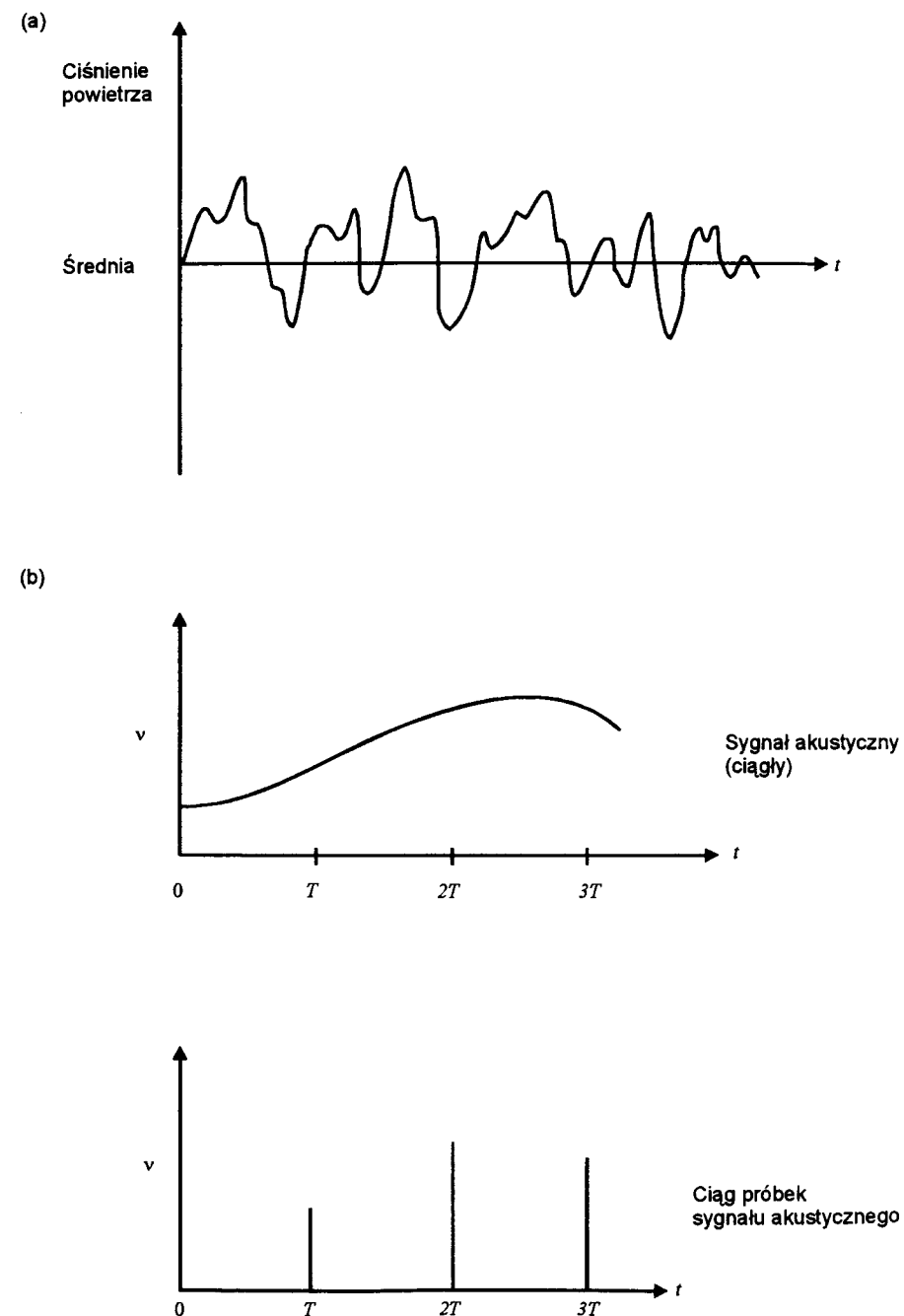
1.4 KLASYFIKACJA SYGNAŁÓW

Informacja reprezentowana w systemie telekomunikacyjnym za pomocą sygnału elektrycznego może zmieniać się w czasie na sposób **ciągły** lub tylko w **dyskretnych** przedziałach czasu. Do sygnałów z czasem ciągłym należą sygnały mowy, sygnały akustyczne i sygnały wideo, a sygnały z czasem dyskretnym spotykamy w przypadku systemów przetwarzania danych oraz systemów z próbkowaniem; są to przykładowo cyfrowe sygnały mowy i sygnały związane z cyfrowym przetwarzaniem obrazu. Sygnały z czasem ciągłym charakteryzują się nieskończoną liczbą możliwych poziomów napięcia leżących w zadanym przedziale. Sygnał mowy jest związany ze zmianami ciśnienia powietrza i typowy przebieg czasowy odpowiedniego sygnału elektrycznego pokazano na rys. 1.2a. W przypadku idealnym sygnał ten dokładnie odpowiada zmianom ciśnienia powstającym w procesie mowy. Innymi słowy, taki sygnał elektryczny jest **analogowy** lub inaczej anlogiczny w stosunku do sygnału mowy.

Prostym przykładem sygnału z czasem dyskretnym jest sygnał wyjściowy przetwornika analogowo-cyfrowego (A/D). Na rysunku 1.2b pokazano, jak w wyniku pierwszego etapu cyfryzacji sygnału, tak jak np. w systemie CD (płyta kompaktowa), otrzymuje się ciąg impulsów napięcia występujących w regularnych dyskretnych momentach czasu.

Sygnały, które nie są z natury analogowe, noszą nazwę **sygnałów cyfrowych**. Są one zazwyczaj binarne i wówczas mają tylko dwa możliwe poziomy napięcia; np., binarne 0 jest reprezentowane przez 0 V, a binarne 1 przez +5 V. Taki sygnał dwustanowy składa się z **bitów** (ang. binary digit – cyfra binarna). Sygnały cyfrowe nie

mają oczywiście nieskończonej liczby możliwych wartości, czyli stanów, jak to miało miejsce w przypadku sygnałów analogowych. Aby reprezentować szeroki zakres informacji z użyciem tylko dwu stanów, trzeba używać ich kombinacji. (Czasem



Rys. 1.2 a – Sygnał z czasem ciągłym; b – sygnał z czasem dyskretnym

stosowaną alternatywą jest używanie sygnałów wielostanowych, gdzie występują np. cztery poziomy napięcia.) Częściej jednak tworzy się krótkie ciągi bitów zwane bajtami. Każdy taki bajt reprezentuje jedną jednostkę oryginalnej informacji. Przykładowo, z użyciem ośmiu bitów można reprezentować 2^8 , czyli 256 stanów.

1.5 PODSUMOWANIE

Telekomunikację można zdefiniować jako proces przesyłania informacji między dwoma lub większą liczbą użytkowników. Informacja ta może pochodzić z wielu źródeł. Gdy nie jest ona w postaci elektrycznej, niezbędne staje się użycie przetwornika dającego na wyjściu sygnał elektroniczny.

Przedstawiono krótką historię telekomunikacji, celem zilustrowania rozmaitych form telekomunikacji i ich podstawowych właściwości. Najważniejszym okazał się wynalazek radia, gdyż umożliwił łączność bezprzewodową oraz rozwój telekomunikacji dalekiego zasięgu. Bardzo przydatne do tego celu okazały się też wzmacniacze, stosowane tak w łączności kablowej jak radiowej, celem pokonania strat energii zachodzących wraz z odległością.

Fale radiowe są klasyfikowane pod względem częstotliwości lub odpowiadających im długości fal leżących w określonych zakresach. Poszczególne zakresy mają rozmaite właściwości pod względem zasięgu i służb, do jakich są używane. Dla zakresów niższych od VHF możliwa jest radiokomunikacja dalekiego zasięgu, a czasem globalna. Ich stosunkowo niskie częstotliwości nośne wykluczają jednak przesyłanie sygnałów szerokopasmowych, takich jak telewizyjne. Fale o częstotliwościach z zakresu VHF i wyższych umożliwiają w zasadzie jedynie łączność w zasięgu bezpośredniej widoczności, lecz nadają się do przesyłania sygnałów szerokopasmowych, w tym i telewizyjnych. Telekomunikacja dalekiego zasięgu na częstotliwościach mikrofalowych wymaga użycia satelitów. Telekomunikacja satelitarna stała się możliwa po wynalezieniu układów scalonych (IC). Wynalazek ten doprowadził następnie do rozwoju zaawansowanych i niezwykle skomplikowanych systemów telekomunikacyjnych, a w szczególności telefonów przenośnych osobistego użytku.

Model systemu telekomunikacyjnego pozwala wyodrębnić podstawowe jego elementy. Sygnały można sklasyfikować jako sygnały z czasem ciągłym, gdy ich wartość zmienia się w sposób ciągły wraz z czasem, lub jako dyskretne gdy ich wartość jest określona jedynie w dyskretnych momentach czasu. Gdy sygnały zmieniają się dokładnie w takt informacji źródłowej, są nazywane analogowymi. Sygnały cyfrowe reprezentują zazwyczaj ciągi bitów, a dla reprezentacji oryginalnej informacji źródłowej stosuje się operacje próbkowania lub kodowania.

2

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

*Aby zapewnić prawidłową transmisję, czy to lokalną czy globalną, a także między ziemią a systemami znajdującymi się w kosmosie, niezbędne jest stosowanie wielu różnych operacji przetwarzania sygnałów. **Przetwarzanie sygnałów** związane jest z uzyskiwaniem takiej postaci sygnału, aby nadawał się on do transmisji w ramach jednego lub większej liczby systemów telekomunikacyjnych. Często występuje potrzeba przetwarzania sygnałów do innych postaci, lub reprezentacji, aby można je było odzyskać w odległym miejscu i w formie możliwie najbliższej ich oryginalnej postaci.*

Wprowadzono pojęcie widma częstotliwościowego. Pojęcie widma sygnału ma głębokie implikacje i należy je brać pod uwagę w każdym systemie telekomunikacyjnym. W tym rozdziale pokazano, iż obie reprezentacje sygnału: czasowa i widmowa, są ze sobą ściśle powiązane. Celem znajdowania widma częstotliwościowego sygnału na podstawie jego postaci czasowej i vice versa, zarówno dla przypadku sygnałów okresowych jak nieokresowych stosuje się analizę fourierowską. Wprowadzono pewną liczbę sygnałów standardowych, zilustrowanych w postaci graficznej, oraz niektóre podstawowe operacje przetwarzania sygnałów. W szczególności omówiono proces filtracji, spotykany w większości systemów telekomunikacyjnych. Wprowadzono też kluczową operację splotu, której opanowanie przez inżyniera telekomunikacji jest konieczne, wraz z jej praktycznymi implikacjami.

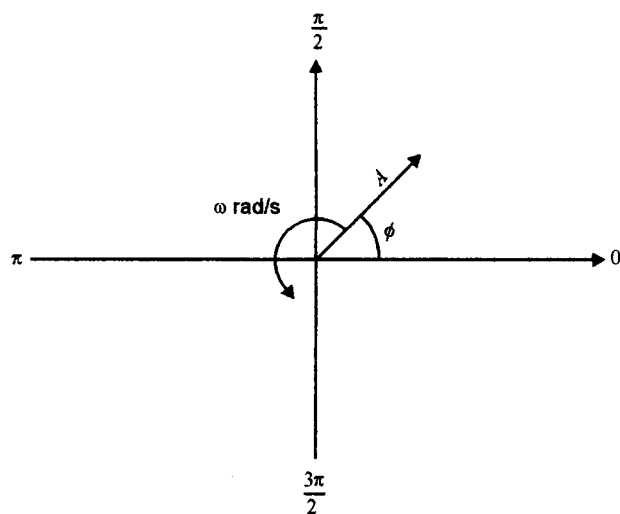
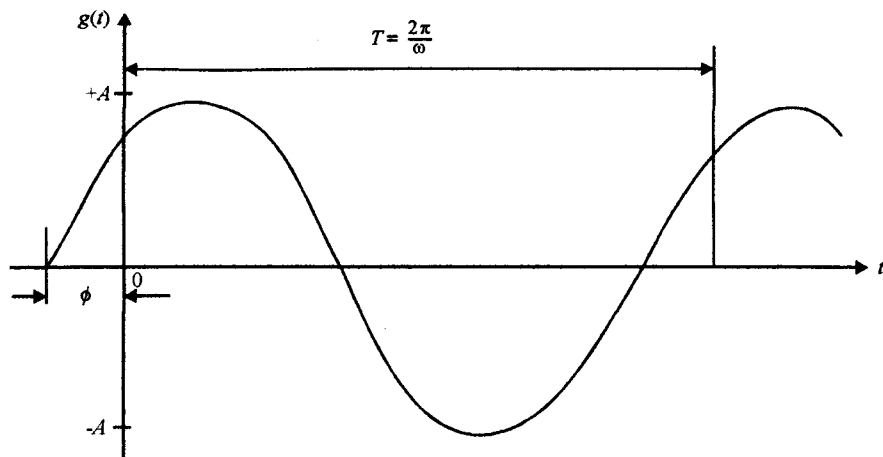
*Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, będące procesem **cyfryzacji** sygnałów umożliwia ich dalsze przetwarzanie za pomocą komputerów i innych urządzeń mikroprocesorowych z użyciem metod numerycznych. W wersji cyfrowej można zrealizować takie same operacje, jak w dziedziny przetwarzania analogowego. Podstawową operacją cyfrowego przetwarzania sygnałów opisaną w tym rozdziale jest filtracja cyfrowa.*

2.1 WIDMA CZĘSTOTLIWOŚCIOWE

Sygnały, z jakimi spotykamy się w systemach telekomunikacyjnych są przebiegami rozmaitego typu. W wielu przypadkach analiza takich systemów możliwa jest z użyciem pojedynczej sinusoidy w charakterze sygnału wejściowego. Niech funkcja $g(t)$ reprezentuje przebieg sinusoidalny postaci:

$$g(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2.1)$$

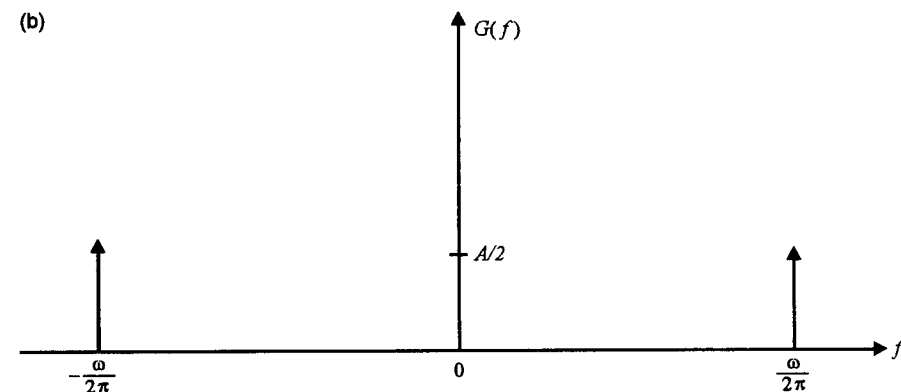
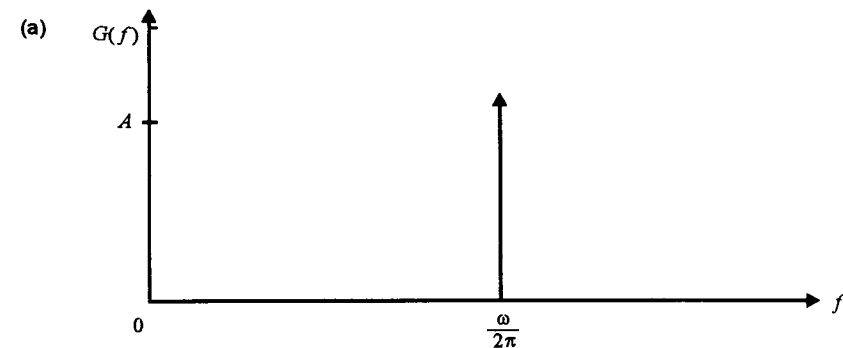
gdzie: A – amplituda sygnału sinusoidalnego, ω – pulsacja mierzona w radianach na sekundę, ϕ – dowolna faza początkowa w radianach.



Rys. 2.1 Reprezentacja graficzna sygnału $g(t)$

Zauważmy, że $\omega/2\pi$ jest częstotliwością sygnału sinusoidalnego mierzoną w hercach. Wyrażenie na $g(t)$ ze wzoru (2.1) zilustrowano na rys. 2.1 w postaci przebiegu czasowego oraz w postaci wskaz, przy czym ϕ stanowi fazę sinusoidy w chwili $t = 0$.

Jak już wspomnieliśmy, rolą nadajnika jest przekształcenie sygnału do postaci dogodnej do jego transmisji przez kanał. Podstawową wymaganą tu operacją jest taka zmiana właściwości widmowych sygnału czyli zakresu częstotliwości, aby odpowiadał on szerokości pasma oferowanej przez kanał. W niektórych systemach, widmo sygnału informacyjnego pozwala na jego bezpośrednie przesyłanie przez kanał. Mówimy wówczas, że transmisja odbywa się w paśmie podstawowym. W przypadku łączy radiowych i światłowodowych, widmo sygnału informacyjnego jest zazwyczaj inne niż to, jakie kanał jest zdolny transmitować. Częstotliwości z pasma podstawowego muszą zostać wówczas przesunięte w kierunku znacznie wyższych częstotliwości. Proces przesuwania



Rys. 2.2 Fala sinusoidalna w dziedzinie częstotliwości, $G(f)$: a – widmo jednostronne; b – widmo dwustronne

widma, znany pod nazwą **modulacji**, zostanie szczegółowo przedstawiony w rozdziale 4, gdzie zajmiemy się sygnałami analogowymi i w rozdziale 5 traktującym o sygnałach cyfrowych.

Aby określić czy widmo danego sygnału jest odpowiednie dla rozpatrywanego kanału, trzeba umieć to widmo wyznaczać. Dla pewnej liczby standardowych sygnałów widmo jest znane. Dla innych sygnałów trzeba dysponować do tego celu odpowiednim narzędziem. Weźmy dla przykładu sinusoidę ze wzoru (2.1):

$$g(t) = U \sin(\omega t + \phi) \quad (2.2)$$

W tym przypadku wiemy, że widmo sygnału $g(t)$ zawiera tylko jedną składową o częstotliwości $\omega/2\pi$ Hz. Jako alternatywa dla reprezentacji czasowej $g(t)$ sygnału pokazanej na rys. 2.1, może służyć jego reprezentacja częstotliwościowa z rys. 2.2a, gdzie została oznaczona jako $G(f)$. Oś pionowa reprezentuje tu amplitudę, a oś pozioma częstotliwość. Jak widać na tym rysunku, widmo $G(f)$ ma tylko jedną składową znaną pod nazwą **impulsu** lub **delta-funkcji**¹⁾. Ten rodzaj widma

¹⁾ Od swego wynalazcy nosi ona też nazwę *delta Diraca* (przyp. tłum.).

określany jest też mianem **widma prążkowego** i w omawianym przypadku jest **widmem jednostronnym**. Na rysunku 2.2b pokazano $G(t)$ w postaci **widma dwustronnego**, gdyż energia sygnału jest tu równo podzielona między prążki o częstotliwościach $-\omega/2\pi$ Hz oraz $+\omega/2\pi$ Hz.

Widmo pokazane na rys. 2.2 jest przykładem widma *dyskretnego*, którego energia zawarta jest w składowej o pojedynczej, czyli dyskretnej częstotliwości. W tym przypadku przebieg, którego widmo jest dyskretne, w dziedzinie czasu nosi charakter **ciągły** na całej osi, tak dla czasów ujemnych (przeszłość) jak dla czasów dodatnich (przyszłość). Uogólniając można stwierdzić, że każdy sygnał okresowy ciągły w czasie ma widmo dyskretne: tzn. jego widmo obejmuje przeliczalny zbiór częstotliwości. Stwierdzenie odwrotne jest też prawdziwe i sygnał o czasie dyskretnym, taki jak pojedynczy impuls delta Diraca ma widmo ciągłe, co pokażemy w punkcie 2.3.

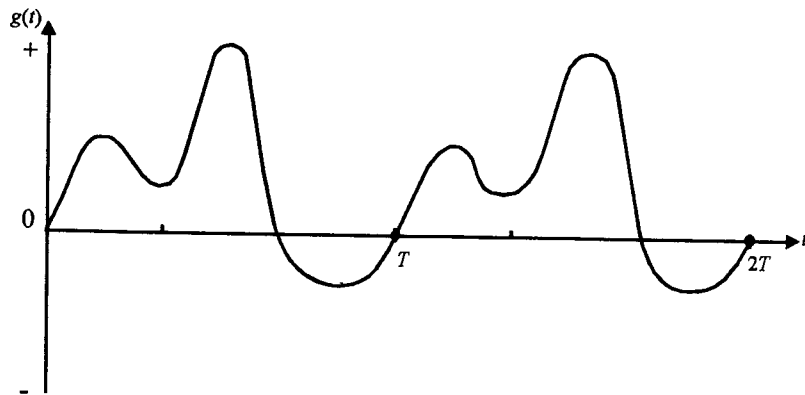
Widmo sygnału **okresowego**, tzn. sygnału, którego pewien fragment powtarza się cyklicznie jak pokazano na przykładzie z rys. 2.3, ma reprezentację matematyczną w postaci **szeregu Fouriera**. Widmo sygnału **nieokresowego**, tzn. takiego, którego żaden fragment nie powtarza się cyklicznie, wyznacza się natomiast za pomocą **transformaty Fouriera** uzyskiwanej na podstawie matematycznego wyrażenia opisującego ten sygnał w dziedzinie czasu.

2.2 SZEREGI FOURIERA

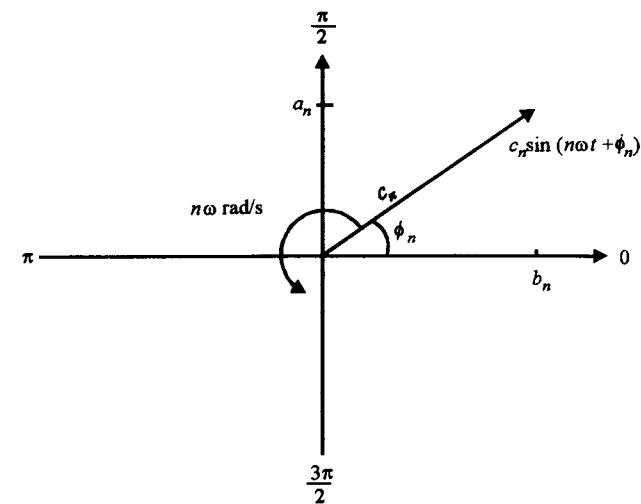
Przebieg okresowy pokazany na rysunku 2.3 ma okres T i częstotliwość powtarzania f równą $1/T$. Przebieg okresowy $g(t)$ o okresie T równym $2\pi/\omega$ ma w zasadzie nieskończone widmo opisywane szeregiem Fouriera:

$$g(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots \quad (2.3)$$

Pierwszy składnik a_0 stanowi składową stałą i nie zawsze istnieje. Dalsze dwie składowe, $a_1 \cos \omega t$ i $b_1 \sin \omega t$ mają częstotliwość $\omega/2\pi$ taką samą jak omawiana uprzednio sinusoida, i będącą odwrotnością jej okresu powtarzania, czyli krótko okresu. Tę częstotliwość będziemy nazywać częstotliwością **podstawową**. Następne dwie



Rys. 2.3 Przebieg okresowy



Rys. 2.4 Pojedyncza sinusoida

składowe mają częstotliwość dwa razy większą od częstotliwości podstawowej i noszą nazwę **drugiej harmonicznej**. Choć tego w omawianym wzorze bezpośrednio nie pokazano, szereg ma nieskończoną liczbę składników o częstotliwościach będących kolejnymi wielokrotnościami częstotliwości podstawowej, tzn. trzeciej harmonicznej, czwartej harmonicznej itd.

Omawiany szereg można zapisać w zwartej postaci matematycznej:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (2.4)$$

Pary współczynników a_n , b_n mnożonych odpowiednio przez czynniki $\cos$ oraz $\sin$ stanowią reprezentację kwadraturową pojedynczego wirującego wskaznika, pokazanego już na rys. 2.1, o amplitudzie c_n i częstotliwości kątowej (pulsacji) ω rad/s. Faza tego wskaznika liczona dla czasu $t = 0$ jest równa:

$$\phi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n} \quad (2.5)$$

natomiast amplituda wynosi:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.6)$$

Każdą parę sinusoida–kosinusoida o tej samej częstotliwości można więc zastąpić przez pojedynczy wirujący wskaznik, jak na rys. 2.4. Prowadzi to do bardziej zwartej zapisu równania (2.4) w postaci:

$$g(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad (2.7)$$

Wartości współczynników Fouriera a_n oraz b_n odróżniają zatem widmo jednego przebiegu okresowego od drugiego. Współczynniki te wyznacza się za pomocą następujących wzorów:

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (2.8)$$

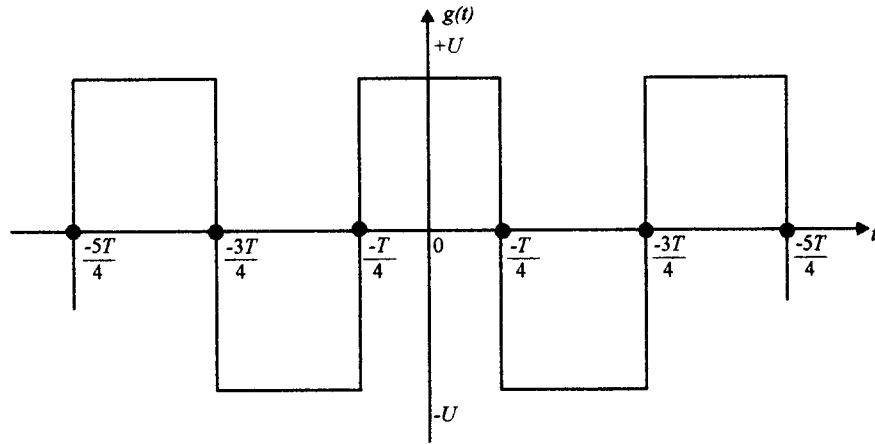
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos n\omega t dt \quad (2.9)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin n\omega t dt \quad (2.10)$$

Zauważmy, że a_0 jest po prostu wartością średnią przebiegu za okres.

PRZYKŁAD 2.1

Wyznaczyć widmo przebiegu pokazanego na rys. 2.5.



Rys. 2.5

ROZWIĄZANIE

Na podstawie rysunku wartość średnia przebiegu, czyli jego składowa stała, wynosi 0 V, tzn. $a_0 = 0$. Fakt ten można sprawdzić za pomocą wzoru (2.8) licząc składową stałą a_0 .

Trzeba więc znaleźć wyrażenie dla $g(t)$ za okres T :

$$g(t) = \begin{cases} +U, & 0 < t \leq T/4 \\ -U, & T/4 < t \leq 3T/4 \\ +U, & 3T/4 < t \leq T \end{cases}$$

Obliczamy teraz składowe kosinusoidalne szeregu Fouriera:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} U \cos n\omega t dt + \frac{2}{T} \int_{T/4}^{3T/4} -U \cos n\omega t dt + \quad (2.11)$$

$$+ \frac{2}{T} \int_{3T/4}^T U \cos n\omega t dt = 2 \frac{U}{T} \left(\frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \right)_0^{T/4} + \left(-\frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \right)_{T/4}^{3T/4} + \quad (2.12)$$

$$+ \left(\frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \right)_{3T/4}^T = \quad (2.13)$$

$$= \frac{2U}{n\omega T} \left[\sin \frac{n\omega T}{4} - 0 - \sin \frac{n\omega 3T}{4} + \sin \frac{n\omega T}{4} + \sin n\omega T - \sin \frac{n\omega 3T}{4} \right] \quad (2.14)$$

Biorąc pod uwagę, że $T = 2\pi/\omega$, $\sin n\omega T = \sin n2\pi$ równa się zeru dla wszystkich n .

Równanie (2.14) przyjmuje zatem postać:

$$a_n = \frac{4U}{n\omega T} \left(\sin \frac{n\omega T}{4} - \sin \frac{n\omega 3T}{4} \right) = \quad (2.15)$$

$$= \frac{2U}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{n3\pi}{2} \right) \quad (2.16)$$

Zatem $a_n = 0$ dla n parzystych, $a_n = 4U/n\pi$ dla $n = 1, 5, 9, \dots$ oraz $a_n = -4U/n\pi$ dla $n = 3, 7, 11, \dots$

Określimy teraz składowe sinusoidalne:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin n\omega t dt = \quad (2.17)$$

$$- \frac{2U}{n\omega T} \left[\left(\cos n\omega t \right)_0^{T/4} + \left(\cos n\omega t \right)_{T/4}^{3T/4} + \left(\cos n\omega t \right)_{3T/4}^T \right] = \quad (2.18)$$

$$= \left[\frac{-2U}{n\omega T} \cos \left(\frac{n\omega T}{4} \right) - \cos 0 + \left(\frac{n\omega 3T}{4} \right) - \cos \left(\frac{n\omega T}{4} \right) + \right. \quad (2.19)$$

$$\left. + \cos(n\omega T) - \cos \left(\frac{n\omega 3T}{4} \right) \right] =$$

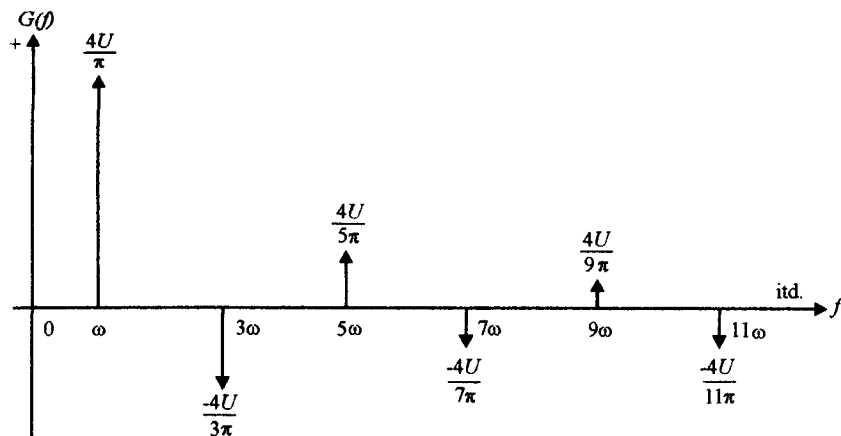
$$= \frac{-2U}{n\omega T} (-1 + \cos n\omega T) \quad (2.20)$$

$$b_n = \frac{-2U}{n\omega T} (-1 + \cos n2\pi) = 0 \quad (2.21)$$

gdzie $\omega = 2\pi/T$.

Poszukiwane widmo ma więc jedynie składowe kosinusoidalne przy braku składowych sinusoidalnych i składowej stałej. Występują tylko kosinusoidalne **nieparzyste harmoniczne** o przemiennych znakach. Wyrażenie na $g(t)$ przybiera ostateczną postać:

$$g(t) = \frac{4U}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \dots \right) \quad (2.22)$$



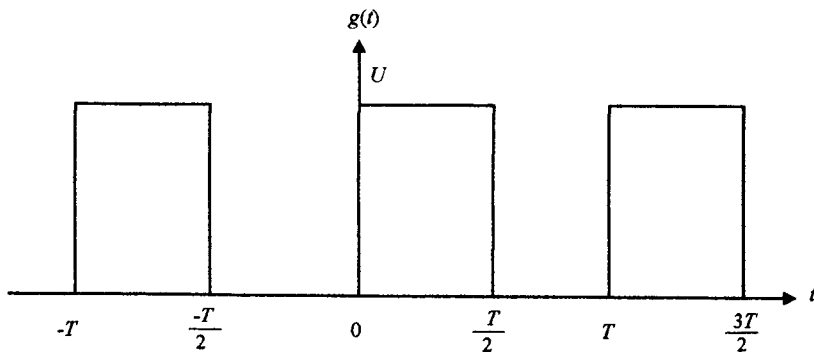
Rys. 2.6

Omawiane widmo zilustrowano rys. 2.6.

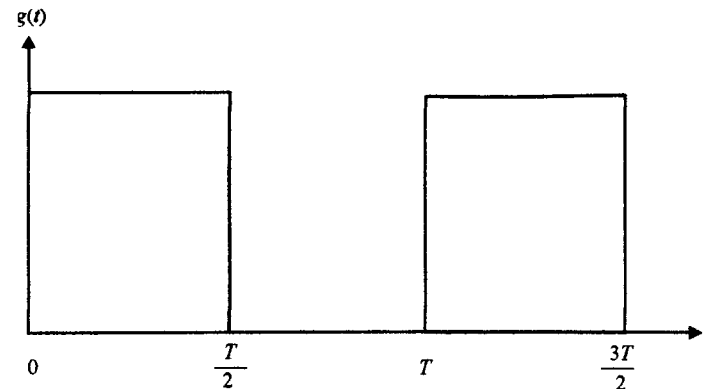
Współczynniki a_n , b_n z omawianego przykładu można wyliczyć znacznie prościej. Choć granice całkowania we wzorach (2.8), (2.9) i (2.10) przyjęto jako 0 i T , nie jest to konieczne. Przy rozwijaniu w szereg Fouriera istotne jest jedynie, aby całki były liczone dokładnie za jeden okres. Rachunki można uprościć biorąc granice $-T/4$ oraz $+3T/4$. Wówczas sygnał $g(t)$ jest zdefiniowany tylko dwoma składnikami, a nie trzema.

Ćwiczenie sprawdzające 2.1 Wyznaczyć widmo przebiegu pokazanego na rysunku 2.7.

W przypadku wielu prostych przebiegów okresowych nie jest konieczne wyznaczanie współczynników szeregu Fouriera. Korzystamy raczej z gotowych tablic współczynników typowych przebiegów czasowych takich, jak zamieszczona w dodatku B.



Rys. 2.7



Rys. 2.8

PRZYKŁAD 2.2

Wyznaczyć widmo fali prostokątnej pokazanej na rysunku 2.8, posługując się tablicami współczynników szeregów Fouriera.

ROZWIĄZANIE

Podana fala ma jak widzimy współczynnik wypełnienia 0,5 i okres T . Na podstawie rysunku stwierdzamy, że składowa stała wynosi $U/2$. Usuwając tę składową uzyskujemy przebieg identyczny jak sygnał B2 z dodatku B, którego amplituda wynosi $U/2$. Rozwinięcie sygnału $g(t)$ jest więc postaci:

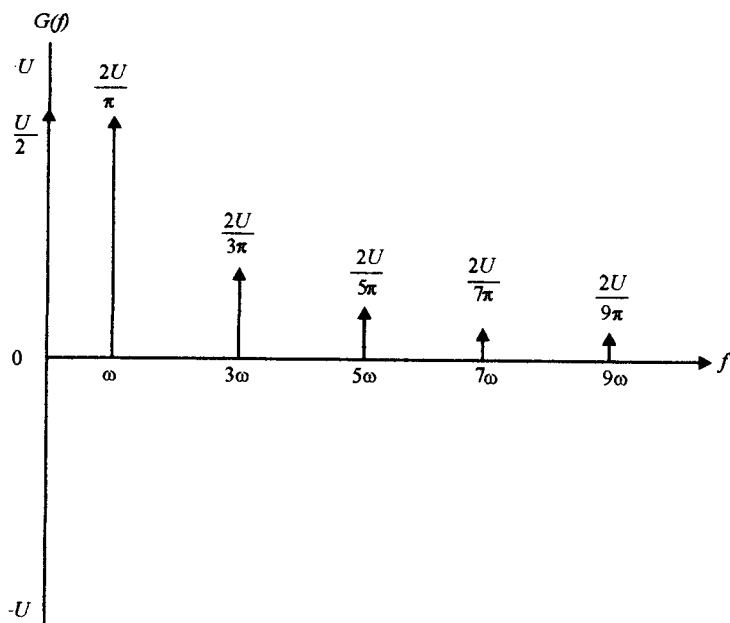
$$g(t) = \frac{U}{2} + 2 \frac{U}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) \quad (2.23)$$

gdzie:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.24)$$

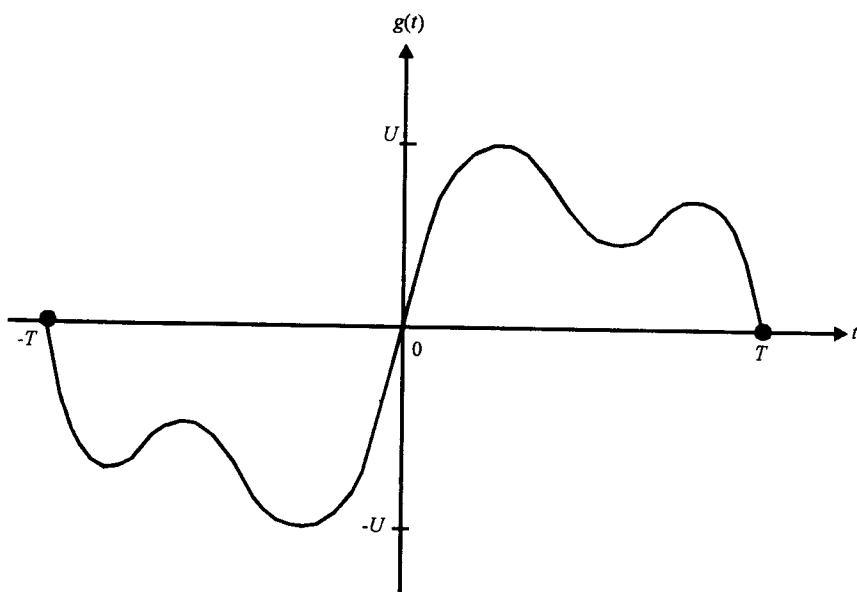
Funkcja $g(t)$ ma jedynie nieparzyste składowe sinusoidalne oraz składową stałą $U/2$, jak na rys. 2.9.

Ostatni przykład pokazuje też, jak można analizować przebieg czasowy za pomocą zasady **superpozycji**, jako sumę dwu lub większej liczby składowych. W tym przypadku $g(t)$ jest sumą składowej stałej $U/2$ oraz bipolarnej fali prostokątnej o wartości szczytowej $U/2$. Oba widma można znaleźć oddzielnie, a potem dodać uzyskując w wyniku widmo całego przebiegu, tzn. składową o amplitudzie $U/2$ dla 0 Hz plus nieparzyste składowe harmoniczne. Jest to metoda użyteczna. Analizowany przebieg może bowiem nie mieć standardowej postaci, dla której istnieje gotowe rozwiązanie w tablicach szeregów Fouriera. Może on jednak przy dokładniejszym zbadaniu okazać się sumą pewnej liczby standardowych przebiegów, dla których istnieją rozwiązania w tablicach. Poszczególne widma można potem po prostu zsumować stosując wymienioną metodę superpozycji.

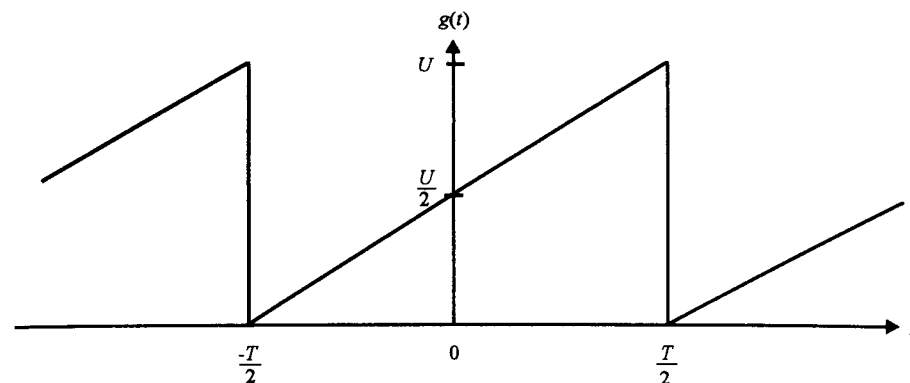


Rys. 2.9

Przebieg opisany w przykładzie 2.1 i pokazany na rys. 2.5 stanowi **funkcję parzystą**; tzn. jest on symetryczny względem osi pionowej. Matematycznie opisujemy funkcję parzystą $f(t)$ jako równą funkcji $f(-t)$; tzn. funkcja ma taką samą wartość dla czasu t , jak dla czasu $-t$. Funkcja parzysta może przy tym zawierać składową stałą lub nie.



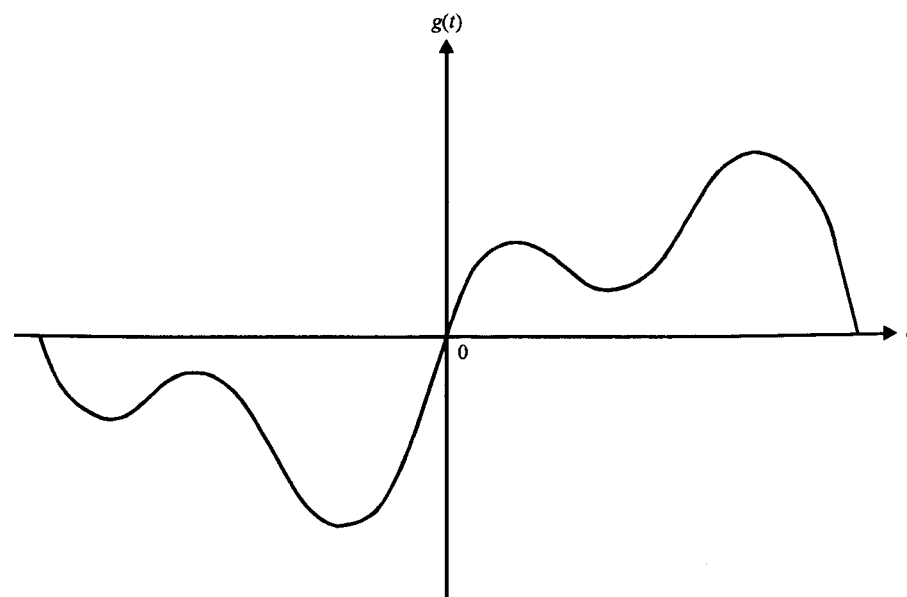
Rys. 2.10 Symetria nieparzysta



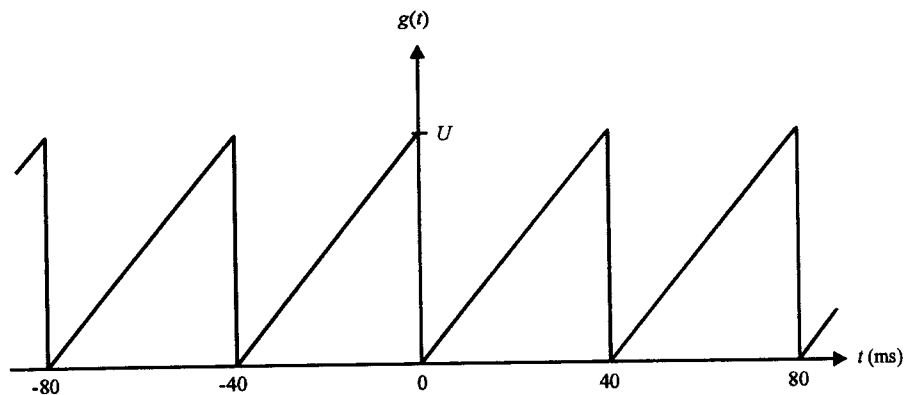
Rys. 2.11 Symetria nieparzysta plus składowa stała

Aby wyznaczyć widmo przebiegu, którego współczynników szeregu Fouriera nie ma w tablicach, trzeba wykonać całkowania określone równaniami (2.8) ÷ (2.10). Wszystkie funkcje parzyste zawierają jednak tylko składowe kosinusoidalne. Innymi słowy $b_n = 0$ dla wszystkich n . Oznacza to zredukowanie rachunków o połowę, gdyż trzeba policzyć tylko współczynniki a_n .

Występują jeszcze inne rodzaje symetrii, pozwalające na uproszczenie rachunków. Mówimy, że przebieg ma symetrię **nieparzystą**, gdy dla czasu t oraz czasu $-t$ ma tę samą amplitudę, lecz przeciwne znaki, tzn. $f(t) = -f(-t)$. Odpowiedni przykład podano na rys. 2.10, gdzie obserwujemy symetrię podanego przebiegu względem środka układu współrzędnych.



Rys. 2.12 Symetria pseudonieparzysta



Rys. 2.13

Przebieg o symetrii nieparzystej nie zawiera składników kosinusoidalnych, tzn. $a_n = 0$ dla wszystkich n , a więc nie posiada także składowej stałej. Niektóre przebiegi mają jednak postać funkcji nieparzystej plus składowa stała równa połowie wartości międzyszczytowej, tzn. $U/2$, jak w przypadku przebiegu z rys. 2.11. Dlatego trzeba zawsze zbadać, czy dany sygnał nie ma ukrytej składowej nieparzystej. Jeśli tego nie zrobimy może się okazać, że zamiast skorzystać z tablic szeregów Fouriera, niepotrzebnie wykonamy zbędne obliczenia.

Trzecim rodzajem symetrii jest **pseudonieparzystość**, pokazana na rys. 2.12. W odróżnieniu od symetrii parzystej i nieparzystej, następuje tu odwrócenie polaryzacji kolejnych półokresów. Przebiegi tego rodzaju, choć mają zarówno składowe sinusoidalne jak i kosinusoidalne, nie zawierają parzystych harmonicznych, a więc i składowej stałej.

Ćwiczenie sprawdzające 2.2 Wyznaczyć widmo przebiegu pokazanego na rysunku 2.13 używając tablic z dodatku B.

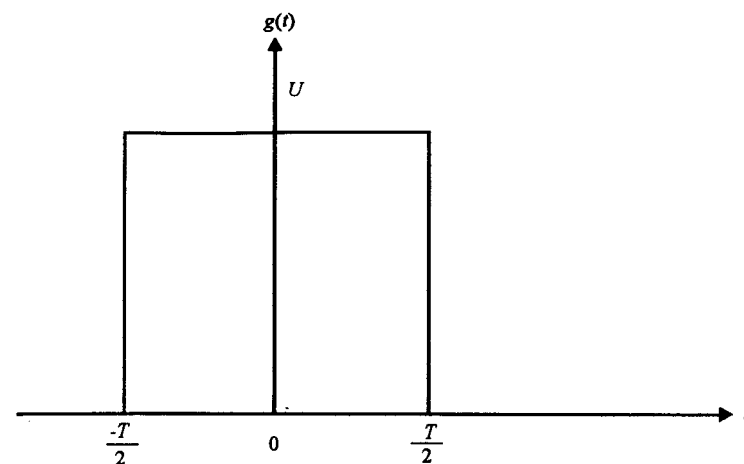
2.3 TRANSFORMATA FOURIERA

Szereg Fouriera pozwala wyznaczyć widmo przebiegu okresowego, ciągłego dla wszystkich czasów od $t = -\infty$ do $t = +\infty$. W rzeczywistości sygnały nie zawsze są ciągłe, lecz gdy licząc widmo sygnału się ciągłość założy, pojawiający się wówczas błąd jest w większości praktycznych przypadków akceptowalny. Aby móc wyznaczyć widmo sygnału nieokresowego, takiego jak pojedynczy impuls, tzn. funkcja o ograniczonym czasie trwania, można zastosować **transformatę Fouriera** zdefiniowaną następująco:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.25)$$

PRZYKŁAD 2.3

Wyznaczyć widmo fali prostokątnej pokazanej na rysunku 2.14.



Rys. 2.14

ROZWIĄZANIE

Najpierw zapiszemy impuls w postaci matematycznej:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2 \\ U, & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0, & t > T/2 \end{cases}$$

Podstawiając $g(t)$ do wzoru (2.25) definiującego transformatę Fouriera otrzymujemy:

$$G(f) = U \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \quad (2.26)$$

$$= \frac{-U}{j2\pi f} (e^{-j2\pi fT/2})_{-T/2}^{T/2} = \quad (2.27)$$

$$= \frac{U}{j2\pi f} (e^{-j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}) = \quad (2.28)$$

$$= \frac{2U}{2\pi f} \left(\frac{e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}}{j} \right) \quad (2.29)$$

Wyrażenie w nawiasie wzoru (2.29) jest postaci (2.30):

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2} \quad (2.30)$$

Otrzymujemy zatem:

$$G(f) = \frac{2U}{2\pi f} \sin\left(\frac{2\pi f T}{2}\right) = \quad (2.31)$$

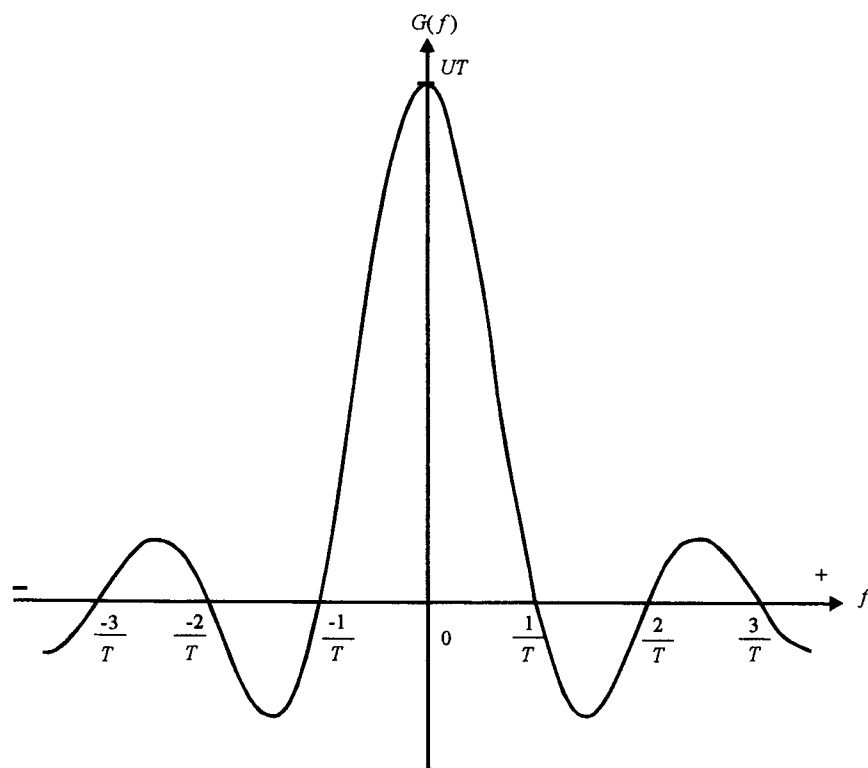
$$= UT \left[\frac{\sin(2\pi f T/2)}{2\pi f T/2} \right] = \quad (2.32)$$

$$= UT \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right] \quad (2.33)$$

Wzór (2.33) określający widmo impulsu prostokątnego jest często używany przy wyznaczaniu transformat Fouriera i nosi nazwę funkcji Sa. Jest ona postaci $\sin(x)/x$, gdzie x jest liczony w radianach a nie w stopniach. Można dlatego przepisać wzór (2.33) w następującej postaci:

$$G(f) = UT \text{Sa} fT \quad (2.34)$$

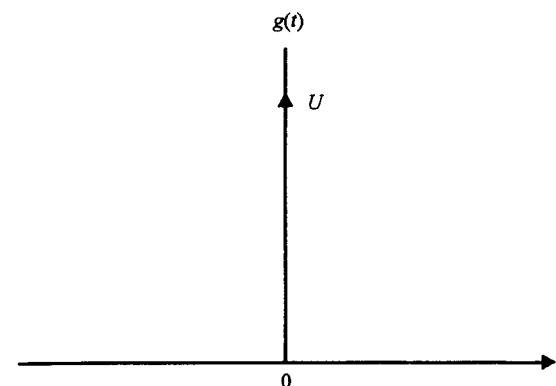
Widmo to zilustrowano na rysunku 2.15, na którym pokazano, że sygnał nieciągły w czasie może mieć widmo będące ciągłą funkcją częstotliwości.



Rys. 2.15 Widmo pojedynczego impulsu

PRZYKŁAD 2.4

Wyznaczyć widmo funkcji delta pokazanej na rysunku 2.16.



Rys. 2.16

ROZWIĄZANIE

Sygnał $g(t)$ jest różny od zera tylko dla $t = 0$. Należy więc wyznaczyć transformatę Fouriera jedynie dla $t = 0$:

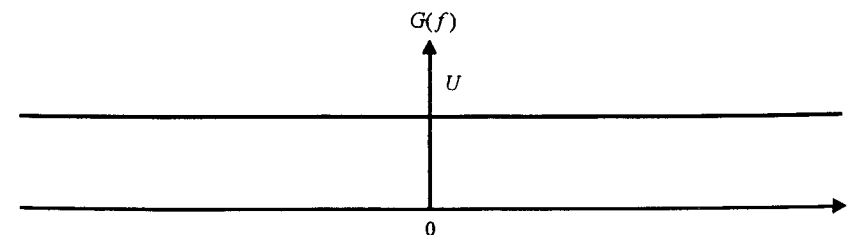
$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt = \quad (2.35)$$

$$= \int_{t=0} U \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.36)$$

Dla $t = 0$, $\delta(t)$ jest po prostu równa 1. Zatem dla $t = 0$ wzór (2.36) przyjmuje postać:

$$G(f) = U \quad (2.37)$$

Oznacza to, że widmo sygnału $U\delta(t)$ jest równe U dla wszystkich częstotliwości, jak to zilustrowano na rys. 2.17.

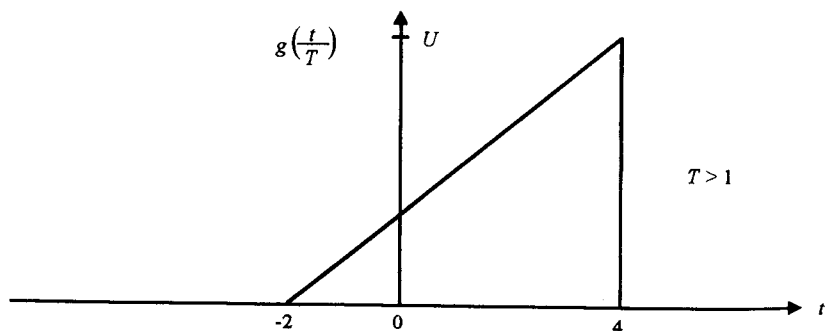
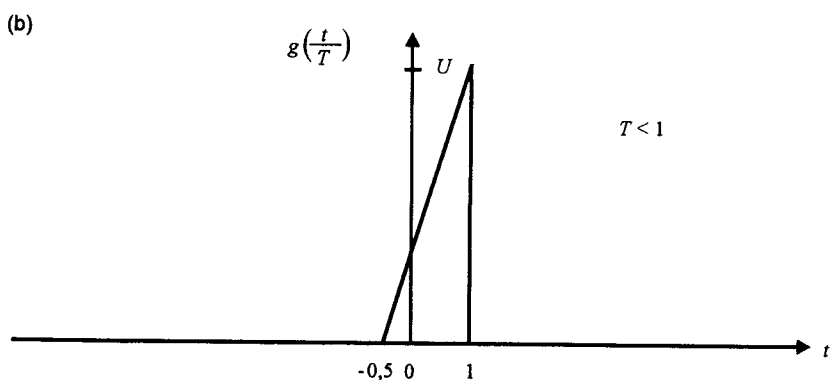
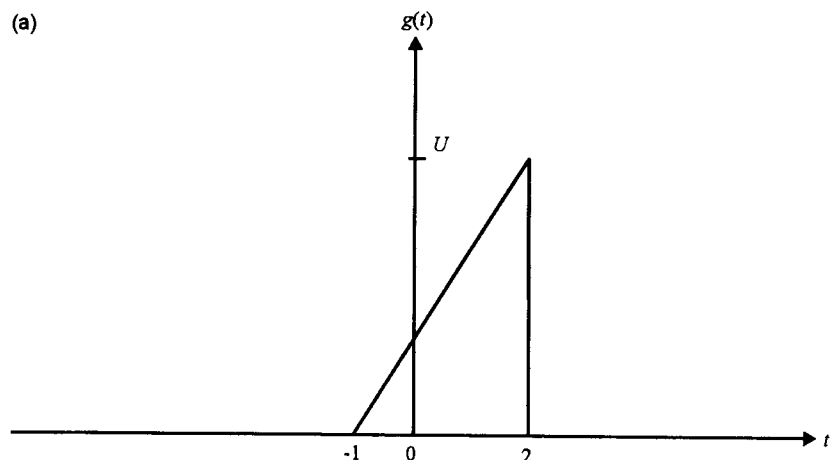


Rys. 2.17

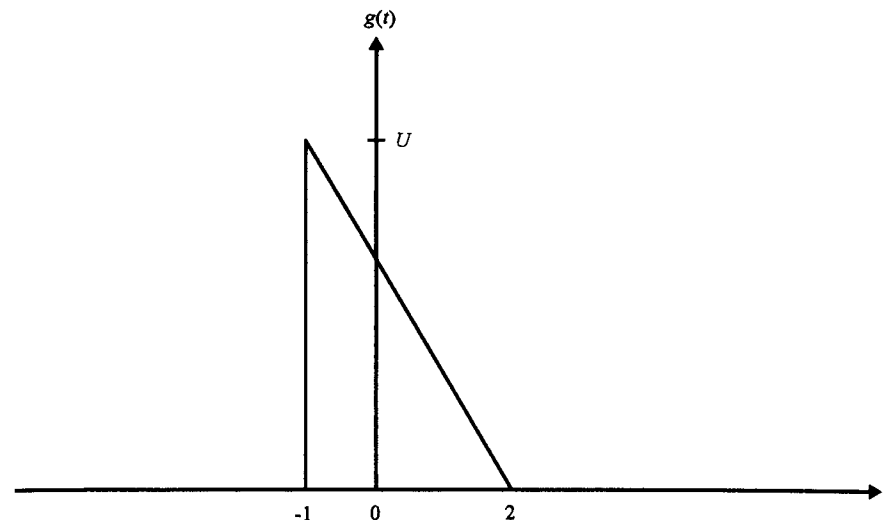
Omawiany przykład pozwala także zilustrować zasadę **dualności** lub inaczej **odwracalności**. Przypuśćmy w tym celu, że sygnał $g(t)$ ma stałą wartość U dla wszystkich czasów i że mamy wyznaczyć jego transformatę Fouriera. Na podstawie przykładu 2.4 wiemy, że odwrotną transformatą Fouriera widma o stałej amplitudzie

U dla wszystkich częstotliwości jest delta-funkcja o amplitudzie U przy $t = 0$. Zastosujemy więc zasadę dualności: stała funkcja czasu transformuje się na delta-funkcję w dziedzinie częstotliwości.

Bardziej formalnie zasada odwracalności jest zapisana w punkcie C1.3 dodatku C. Bierzemy zatem znane widmo $G(f)$ z przykładu 2.4, stałe w częstotliwości,



Rys. 2.18 Skalowanie w czasie: a – $g(t)$; b – $g(t/T)$



Rys. 2.19

i zapisujemy je jako $G(t)$ zastępując oś częstotliwości osią czasu. Wiemy, że odwrotna transformata z $G(f)$ wynosi $g(t)$ i jest delta-funkcją. Jak wynika ze wzoru podanego w dodatku C, nasze nowe wyrażenie $G(t)$ transformuje się na $g(-f)$ będące odpowiednikiem $g(t)$ z przykładu 2.4, lecz odpowiednikiem czasu t staje się częstotliwość $-f$. Po prostu funkcja $g(t)$ z przykładu 2.4 występuje teraz w dziedzinie częstotliwości jako odwrócona względem osi pionowej. Zasada odwracalności pozwala więc stwierdzić, że stałe napięcie U w dziedzinie czasu transformuje się na widmo $U\delta(f)$.

Ćwiczenie sprawdzające 2.3 Impuls prostokątny ma amplitudę 1 i czas trwania 1 sekundy. Wyznaczyć transformatę Fouriera i widmo przyjmując, że impuls jest wycelowany względem czasu t_d .

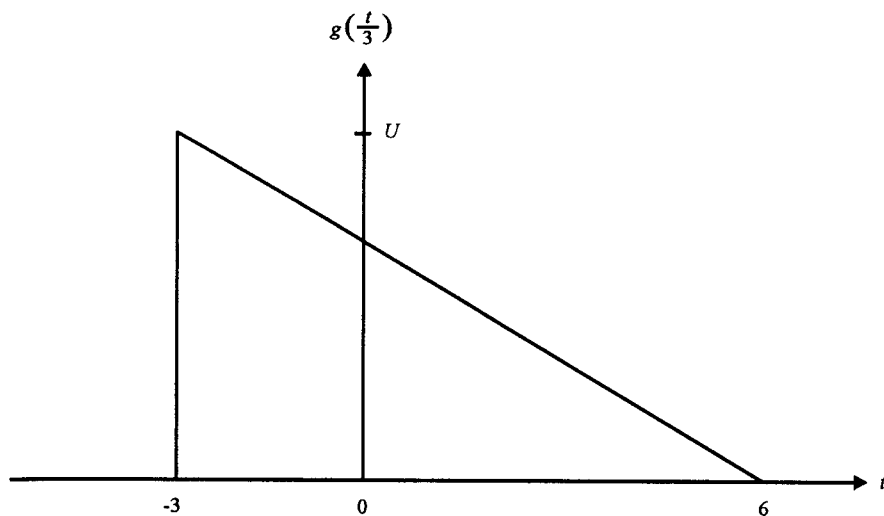
Przypuśćmy, że sygnał $g(t)$ ma postać jak na rys. 2.18a. Możemy go **przeskalować w czasie** o stałą T tak, iż $g'(t) = g(t/T)$. Chwila czasu $t = t_1$ przechodzi w $T \cdot t_1$. Zgadza się to z intuicją, gdyż wartość funkcji $g(t/T)$ musi być równa $g(t)$. Wynik skalowania o czynnik T pokazano na rysunku 2.18b. Gdy T jest mniejsze od jedności, $g(t)$ doznaje kompresji w czasie, w przypadku przeciwnym zostaje rozciągnięta w czasie. Gdy następuje kompresja w czasie możemy powiedzieć, iż bieg zdarzeń się przyspiesza i spodziewamy się rozciągnięcia skali w dziedzinie częstotliwości i vice versa.

PRZYKŁAD 2.5

Funkcję $g(t)$ pokazaną na rys. 2.19 przeskalowano o wartość 3. Naszkicować funkcję $g(t/3)$.

ROZWIĄZANIE

Jak już pokazano, dzielenie t przez 3 powoduje przesunięcie zdarzeń zachodzących dla funkcji $g(t)$ w chwili t do chwili $3t$. Skoro więc współczynnik T wynosi



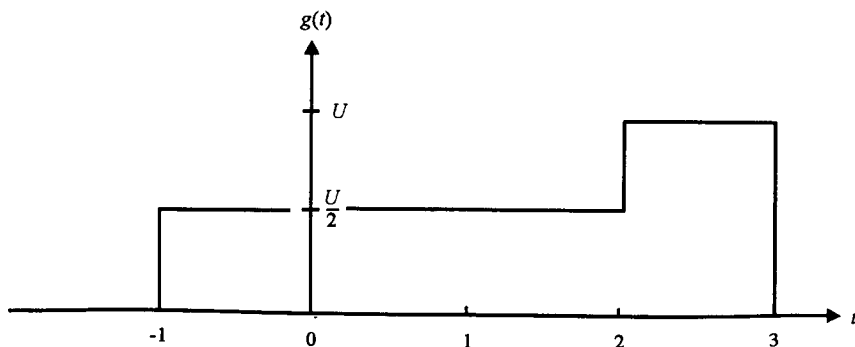
Rys. 2.20

3 stwierdzamy, że przebieg $g(t)$ istotnie został „rozciągnięty” trzykrotnie, jak to pokazuje rys. 2.20.

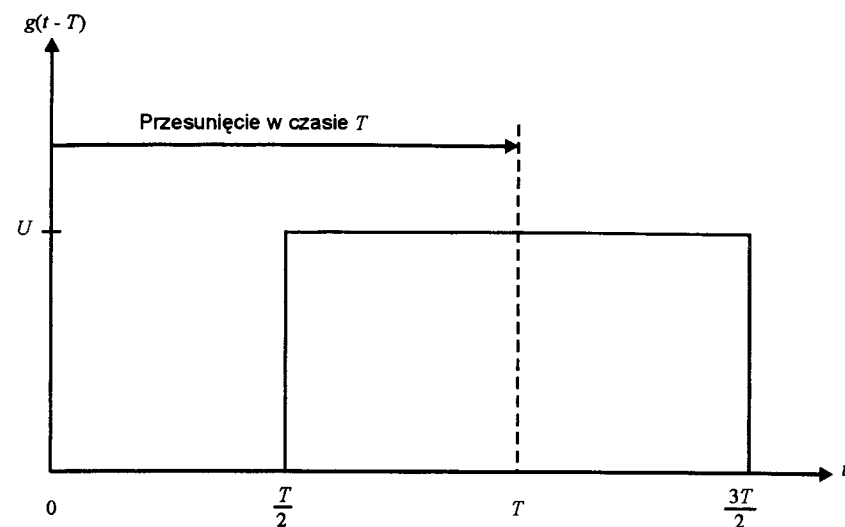
Ćwiczenie sprawdzające 2.4 Funkcja $g(t)$ ma postać jak na rys. 2.21. Przyjmując, że $g(t)$ została przeskalowana do postaci $g(2t)$, ustalić wartość współczynnika skalującego T i naszkicować przebieg funkcji $g(2t)$.

Tak jak w przypadku szeregu Fouriera, tak również poszukując transformaty można zaoszczędzić rachunków, gdyż wiele typowych funkcji i ich widm zostały już stabilizowane. W dodatku C zebrano pewną liczbę par transformat Fouriera wraz z wykresami przebiegów czasowych i ich widm.

Jak podano w dodatku C, funkcja $g(t/T)$ transformuje się na $T \cdot G(fT)$. Zauważmy, iż prócz skalowania w częstotliwości zachodzi także skalowanie amplitudy. Jak należało się spodziewać, gdy T jest większe od jednośc, w dziedzinie częstotliwości następuje kompresja widma. Aby było zachowane pole pod krzywą (będące miarą energii zawartej w sygnale), następuje jednocześnie T -krotne rozciągnięcie w amplitudzie widma $G(f)$.



Rys. 2.21



Rys. 2.22 Przesunięcie w czasie

Wracając do przykładu 2.3, można zdefiniować impuls pokazany na rys. 2.14 jako impuls prostokątny o amplitudzie 1 i szerokości 1, przeskalowany przez współczynnik T . Dlatego można zapisać, że $g(t) = \Pi(t/T)$. Korzystamy więc z tablic biorąc pod uwagę transformatę Fouriera przebiegu $g(t)$ oraz efekt skalowania do postaci $g(t/T)$.

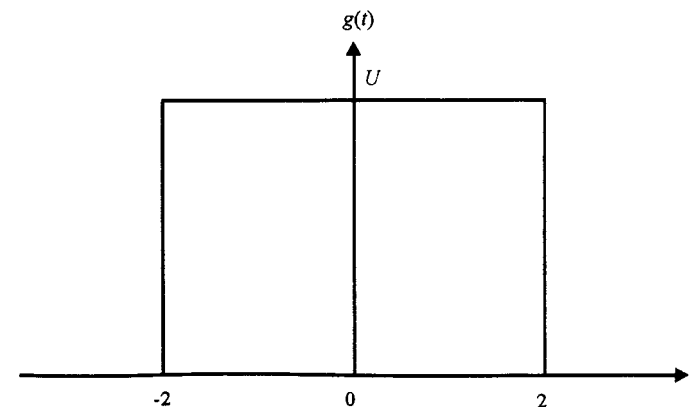
Dla $g(t)$ równego $\Pi(t)$ transformata $G(f)$ wynosi $\text{Sa}(f)$.

Skalowanie przez T : $g(t/T)$ ma transformatę $T \cdot G(fT)$. Zatem $G(f)$ zostaje wyskalowane w amplitudzie T -krotnie i wszędzie tam, gdzie f pojawia się w funkcji $G(f)$, zostaje zastąpione przez fT .

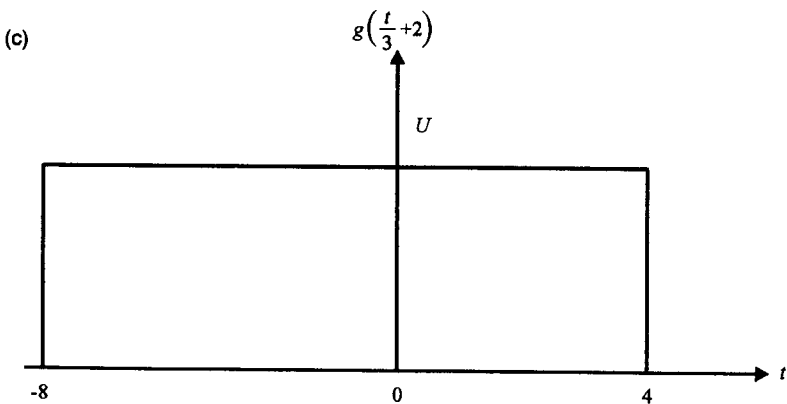
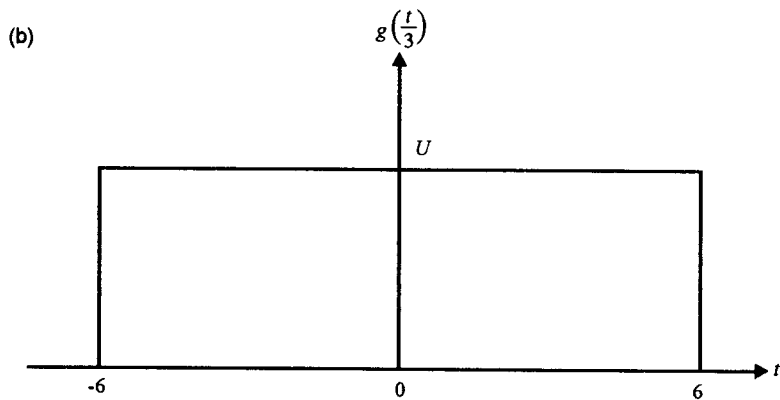
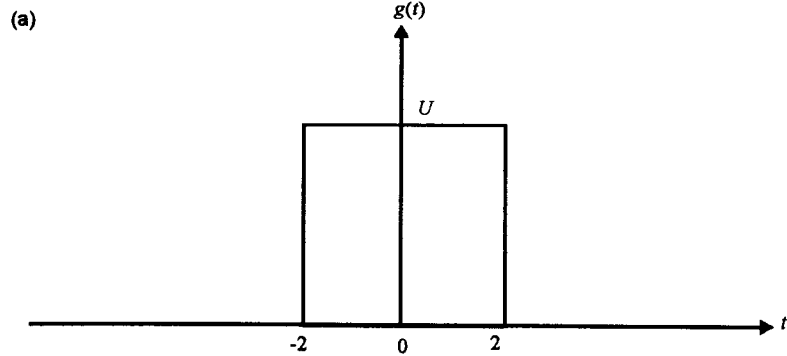
Możemy więc napisać:

$$g(t) = \Pi(t/T) \Rightarrow T \cdot G(fT) = \quad (2.38)$$

$$= T \text{Sa}(fT) \quad (2.39)$$



Rys. 2.23



Rys. 2.24 a – $g(t)$; b – $g(t/3)$; c – $g(\frac{t}{3} + 2)$

Transformata przebiegu $\Pi(t/T)$ ma, jak można zobaczyć w tablicach, takie samo widmo jak pokazane w przykładzie 2.3. Przykład ten ilustruje, jak można skorzystać z tablic przy poszukiwaniu widma sygnału $g(t)$ o znanym widmie, który

poddano jednemu lub większej liczbie przekształceń. W tym przypadku zobaczyliśmy, jak widmo przeskalowanego w czasie sygnału $g(t)$ można uzyskać wykorzystując standardowe tablice transformat.

Inną operacją, jakiej można poddać sygnał $g(t)$ jest **przesunięcie w czasie**. Niech impuls prostokątny z rys. 2.14 dozna przesunięcia w dodatnim kierunku osi czasu o wartość T , jak na rys. 2.22. Uzyskamy tym sposobem nową funkcję $g'(t)$ przy czym:

$$g'(t) = g(t-T)$$

Zdarzenie w chwili t równej t_1 pojawi się teraz w chwili $t_1 + T$. Tak musi być, gdyż dla danego zdarzenia amplituda funkcji $g(t-T)$ w chwili t musi być taka jak funkcji $g(t)$.

Ćwiczenie sprawdzające 2.5 Przebieg $g(t)$ jest postaci jak na rys. 2.23. Został on przesunięty w czasie o wartość -5 tak, iż $g'(t) = g(t+5)$.

a) Naszkicować przebieg $g'(t)$.

b) Wyznaczyć transformatę Fouriera $G'(f)$ za pomocą tablic.

c) Porównać odpowiedź uzyskaną w punkcie b) z odpowiedzią uzyskaną przy wykorzystaniu podstawowych właściwości transformaty Fouriera.

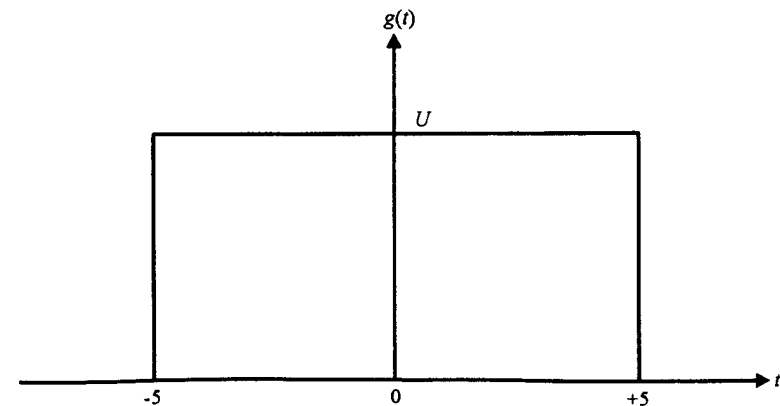
Jak już zaznaczono, sygnał można poddawać operacjom wielokrotnym. Rozważmy przykład 2.6.

PRZYKŁAD 2.6

Przyjmując, iż funkcja $g(t)$ ma postać jak na rys. 2.24a, wyznaczyć przebieg funkcji $g(t/3 + 2)$.

ROZWIĄZANIE

Przy pewnej wprawie można w wielu przypadkach zapisać nową funkcję bezpośrednio, rozpatrując każdą pojedynczą operację, jakiej poddano sygnał $g(t)$. Należy jednak postępować uważnie. Zauważamy np., iż funkcję $g(t)$ przeskalowano przez 3, a następnie przesunięto (w lewo) o 2 jednostki. Po przeskalowaniu otrzymujemy



Rys. 2.25

sygnał jak na rys. 2.24b. Stosując teraz przesunięcie o +2 uzyskujemy wynik w postaci $g(t/3+2)$ z rys. 2.24c. Ponieważ obie operacje są liniowe, mogliśmy ich dokonać w porządku odwrotnym: przesunięcie a następnie skalowanie; wynik byłby taki sam. Proponujemy sprawdzić to w formie ćwiczenia.

Ćwiczenie sprawdzające 2.6 Wyznaczyć widmo sygnału $g(t/4-3)$ posługując się tablicami transformat Fouriera wiedząc, że sygnał $g(t)$ ma postać jak na rys. 2.25.

2.4 ODWROTNA TRANSFORMATA FOURIERA

Większość operacji matematycznych ma charakter dwustronny w tym sensie, iż można odtworzyć funkcje stanowiącą oryginał dokonując operacji odwrotnej. W rachunku różniczkowym są to odwracalne operacje różniczkowania i całkowania. W przypadku transformaty Fouriera, używanej dla przekształcania zależności czasowych w dziedzinę częstotliwości, można dokonywać **odwrotnej transformacji Fouriera** celem znajdowania przebiegu będącego reprezentacją czasową danego widma częstotliwościowego. Odwrotna transformata Fouriera jest zdefiniowana wzorem:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} dt \tag{2.40}$$

PRZYKŁAD 2.7

Wyznaczyć czasową reprezentację widma $UTSa(fT)$ używając odwrotnej transformaty Fouriera.

$$g(t) = UT \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} e^{j2\pi ft} df \tag{2.41}$$

ROZWIĄZANIE

Podstawiając do równania (2.41) wyrażenie:

$$e^{j2\pi ft} = \cos 2\pi ft + j \sin 2\pi ft \tag{2.42}$$

otrzymujemy:

$$g(t) = \frac{U}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi ft \cos 2\pi ft}{f} df + j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi ft \sin 2\pi ft}{f} df \right) \tag{2.43}$$

Prawa funkcja podcałkowa we wzorze (2.43) jest nieparzysta jako iloczyn dwu funkcji nieparzystych. Całka z funkcji nieparzystej w przedziale $(-\infty, \infty)$ jest równa zero. Można ją zatem opuścić, a lewą całkę z funkcji parzystej zapisać jako dwie całki wzięte w przedziale $(0, \infty)$. Wzór (2.43) uzyskuje postać:

$$g(t) = 2 \frac{U}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi ft \cos 2\pi ft}{f} df \tag{2.44}$$

Mamy tożsamość:

$$\sin \pi ft \cos 2\pi ft = \frac{1}{2} [\sin(2\pi ft + \pi ft) - \sin(2\pi ft - \pi ft)] \tag{2.45}$$

po podstawieniu której wzór (2.44) przybiera formę:

$$g(t) = \frac{U}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin[\pi(2t+T)f]}{f} df - \frac{U}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin[\pi(2t-T)f]}{f} df \tag{2.46}$$

Biorąc pod uwagę standardową całkę:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0 \end{cases}$$

Oznaczmy we wzorze (2.46) lewą całkę przez I_1 a prawą całkę przez I_2 uzyskując zapis:

$$g(t) = \frac{U}{\pi} (I_1 - I_2) \tag{2.47}$$

przy czym:

Dla $-\infty < t < -T/2$ mamy $I_1 = -\pi/2$, $I_2 = -\pi/2$, a stąd $I_1 - I_2 = 0$
Dla $-T/2 < t < T/2$ mamy $I_1 = \pi/2$, $I_2 = -\pi/2$, a stąd $I_1 - I_2 = \pi$
Dla $T/2 < t < \infty$ mamy $I_1 = \pi/2$, $I_2 = \pi/2$, a stąd $I_1 - I_2 = 0$

Sygnał $g(t)$ ze wzoru (2.47) jest więc postaci:

$$g(t) = \frac{U}{\pi} \pi = U \quad \text{dla} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \tag{2.48}$$

Transformata odwrotna widma $UTSa(fT)$ jest więc równa $U\Pi(t/T)$. Transformate Fouriera funkcji $U\Pi(t/T)$ znaleźliśmy już w przykładzie 2.3 i teraz pokazaliśmy, że jak należało oczekiwać odwrotna transformata Fouriera z $UTSa(fT)$ jest taka sama.

2.5 SPLOT

W stosunku do sygnału można w zasadzie zastosować dowolną operację matematyczną. Przekonaaliśmy się już, jak za pomocą całkowania można przechodzić z dziedziny czasu w dziedzinę częstotliwości i na odwrót. Typowymi operacjami stosowanymi do sygnału są: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (choć to ostatnie może być uważane jako mnożenie przez liczbę mniejszą niż 1).

Wiemy już, że jeśli chodzi o model systemu telekomunikacyjnego pokazany w rozdziale 1, to kanałowi można przypisać transmitancję stanowiącą matematyczną relację pomiędzy wyjściem $K(f)$ a wejściem $G(f)$. Jeśli sygnał reprezentowany

przez $G(f)$ zostaje przyłożony na wejście kanału, to jego wyjście $K(f)$ wyraża się zależnością:

$$K(f) = G(f) \cdot H(f) \tag{2.49}$$

Na tej podstawie można wyznaczyć $k(t)$ jako odwrotną transformatę Fouriera z $K(f)$. W pewnych przypadkach $G(f)$ lub $H(f)$ mogą nie być znane lub ich iloczyn może być trudny do retransformacji. Można wówczas łatwiej wyznaczyć $k(t)$ w następujący sposób:

$$k(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f) \cdot H(f)] = \tag{2.50}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \cdot H(f) e^{j2\pi ft} df \tag{2.51}$$

gdzie symbol $\mathcal{F}^{-1}$ stanowi skrót operacji „odwrotna transformata Fouriera”.

Całkowanie iloczynu we wzorze (2.51), gdzie występują dwie funkcje zmiennej f , może zostać dokonane za pomocą zmiennej fikcyjnej, którą oznaczmy przez u . Wyrażając $G(f)$ w formie transformaty Fouriera możemy napisać:

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-j2\pi fu} du \right] H(f) e^{j2\pi ft} df \tag{2.52}$$

Zmieniając kolejność całkowania otrzymujemy zależność:

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi(t-u)f} df \right] du \tag{2.53}$$

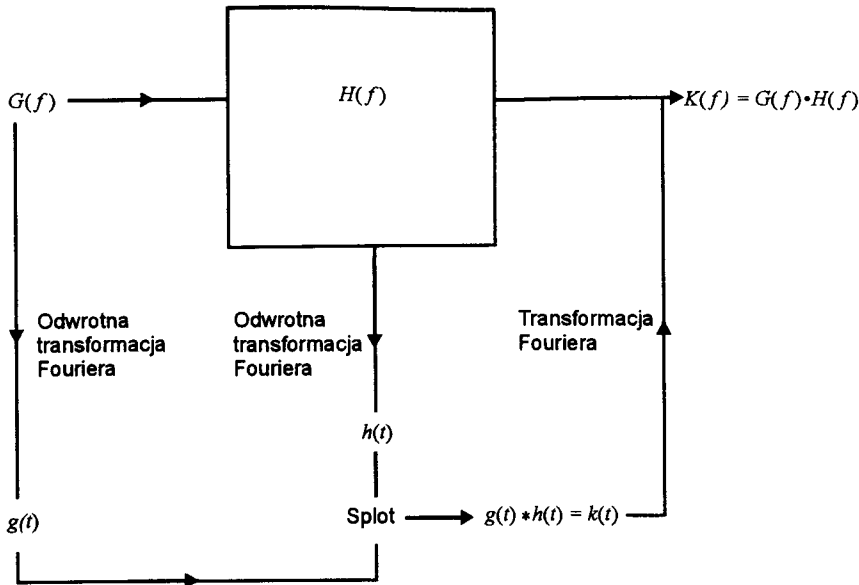
Porównując wzory (2.53) i (2.40) stwierdzamy, że wyrażenie w nawiasach kwadratowych jest po prostu odwrotną transformatą Fouriera z $H(f)$ przesuniętą w czasie o wartość u . Dlatego możemy napisać:

$$H(f) e^{-j2\pi uf} \rightleftharpoons h(t-u) \tag{2.54}$$

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cdot h(t-u) du \tag{2.55}$$

Równanie (2.55) wyraża operację matematyczną znaną pod nazwą **splotu**. Zatem mnożeniu w dziedzinie częstotliwości odpowiada splot w dziedzinie czasu. (Jest to operacja przemienne w tym sensie, że zachodzi relacja przeciwna – splotowi w dziedzinie częstotliwości odpowiada mnożenie w dziedzinie czasu.) Operację splotu oznacza się gwiazdką, a nie znakiem mnożenia. Rysunek 2.26 pokazuje tworzenie splotu, jako operacji alternatywnej w stosunku do mnożenia.

Jak widzimy, chcąc otrzymać widmo $K(f)$ nie trzeba mnożyć widma wejściowego przez transmitancję, można się posłużyć odwrotnymi transformatami Fouriera z $G(f)$ i $H(f)$. Ich splot daje poszukiwaną odpowiedź $k(t)$. Aby otrzymać widmo wyjściowe $K(f)$ wystarczy teraz obliczyć transformatę Fouriera z $k(t)$.



Rys. 2.26 Splot

Splot i mnożenie nie są identyczne, choć są w pewnym sensie operacjami komplementarnymi. Ich wzajemna relacja jest następująca:

$$G(f) \cdot H(f) \rightleftharpoons g(t) \star h(t) \tag{2.56}$$

$$g(t) \cdot h(t) \rightleftharpoons G(f) \star H(f) \tag{2.57}$$

Splot jest zdefiniowany zależnością:

$$g(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) h(t-u) du = \tag{2.58}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u) h(u) du \tag{2.59}$$

przy czym $g(u)$ oznacza to samo co $g(t)$, gdzie t zastąpiono zmienną fikcyjną u . Następujący przykład wyjaśnia sposób wyznaczania splotu dwu sygnałów.

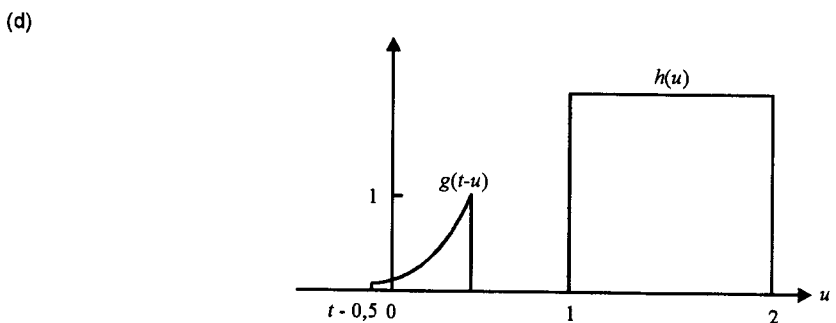
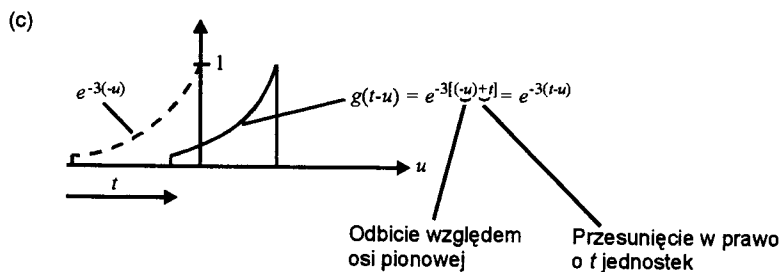
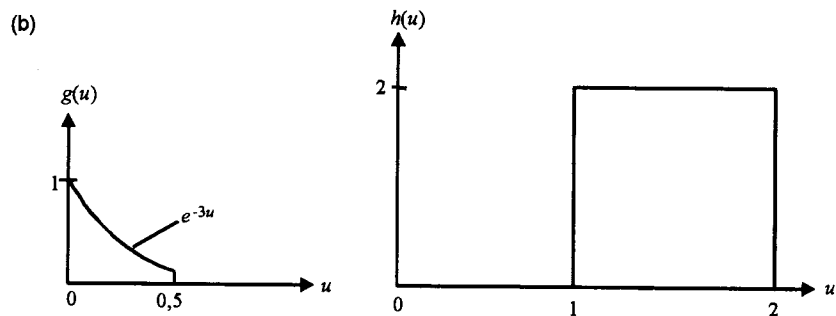
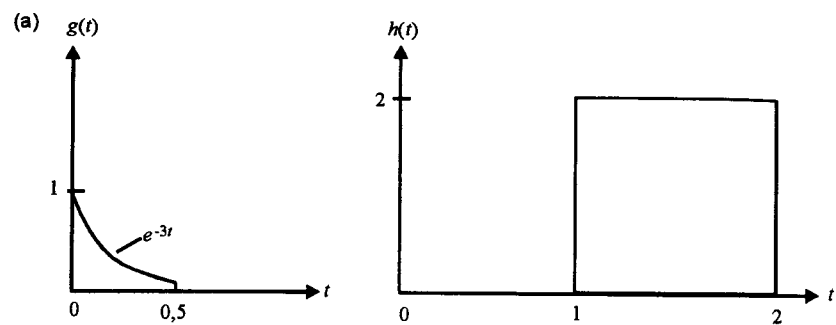
PRZYKŁAD 2.8

Wyznaczyć splot dwu sygnałów $g(t)$ i $h(t)$ przedstawionych na rys. 2.27a.

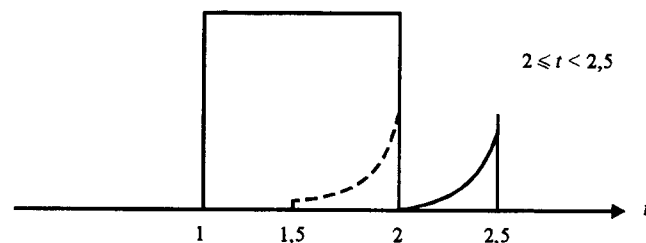
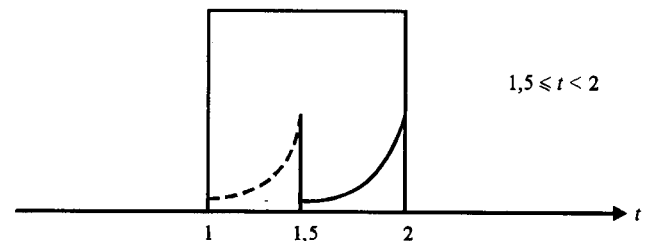
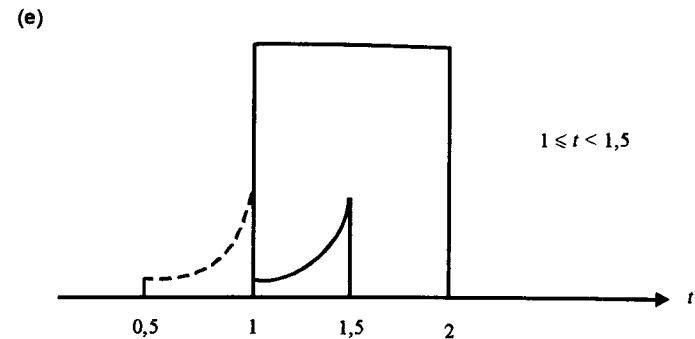
ROZWIĄZANIE

Krok 1

Wprowadzić zmienną fikcyjną, aby utworzyć $g(u)$ i $h(u)$, jak na rys. 2.27b.



Rys. 2.27 a-d



Rys. 2.27e

Krok 2

Utworzyć $g(t-u)$, jak na rys. 2.27c. Jest to po prostu $g(-u)$, lustrzane odbicie $g(u)$ względem osi pionowej, przesunięte w prawo o wartość t .

Krok 3

Umieścić $g(t-u)$ i $h(u)$ we wspólnym układzie współrzędnych, jak na rys. 2.27d. Następnie przesunąć $g(t-u)$ wzdłuż osi poziomej od $u = -\infty$ do $u = +\infty$ przy odpowiedniej zmianie t . Uważnie przyglądając się rysunkowi 2.27d zauważamy, iż występują tu trzy różne sytuacje, pokazane na rys. 2.27e. Gdy $g(t-u)$ przesuwa się stopniowo od lewej strony, częściowe nakładanie się wykresów zachodzi od momentu, gdy t przekroczy 1. Wykresy całkowicie zachodzą na siebie, gdy $t \geq 1,5$. Kiedy t dalej wzrasta, nakładanie się wykresów znów staje się częściowe, gdy $t \geq 2$, aż przy $t > 2,5$ oba wykresy przestaną się pokrywać.

Wyznaczyć splot wiedząc, że:

$$g(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)h(u)du \quad (2.60)$$

Całka splotu jest równa polu pod krzywą iloczynu $g(t-u)$ oraz $h(u)$. Ten iloczyn jest oczywiście równy zero dla $t < 1$ i $t > 2,5$ gdyż na zewnątrz przedziału $1 \leq t \leq 2,5$ krzywe nie zachodzą na siebie i ich iloczyn wynosi zero. Na podstawie rys. 2.27e możemy zatem napisać:

$$g(t) \star h(t) = \begin{cases} \int_1^t e^{-3(t-u)} 2 du, & 1 \leq t < 1,5 \end{cases} \quad (2.61)$$

$$g(t) \star h(t) = \begin{cases} \int_{t-0,5}^t e^{-3(t-u)} 2 du, & 1,5 \leq t < 2 \end{cases} \quad (2.62)$$

$$g(t) \star h(t) = \begin{cases} \int_{t-0,5}^2 e^{-3(t-u)} 2 du, & 2 \leq t < 2,5 \end{cases} \quad (2.63)$$

Zauważmy, iż we wzorze (2.61) całkowanie zaczyna się od $t = 1$, gdyż dla $t < 1$ całka jest równa zero. We wzorze (2.62) dolna granica całkowania wynosi $t-0,5$, co stanowi lewy brzeg funkcji $g(t-u)$ i musi być równa 1 dla $t = 1,5$. Ta granica odpowiada lewemu brzegowi funkcji $g(t-u)$ przesuniętej w prawo od $u = 1$ do $u = 1,5$. Granica całkowania stopniowo odcina dolną granicę całkowania, gdy $g(t-u)$ zostaje przesuwana w prawo. Górna granica całkowania zostaje ustalona przez jej wartość krańcową $t = 2$. Wreszcie, zgodnie ze wzorem (2.63), lewy brzeg funkcji $g(t-u)$ ogranicza zakres całkowania od $u = 1,5$ do $u = 2$ wyznaczającego górną granicę całkowania dla wszystkich u . Tutaj jak uprzednio dolna granica całkowania wynosi $t-0,5$ a górna granica jest równa $t = 2$.

Można teraz dokończyć całkowania we wzorach (2.61), (2.62) i (2.63), uzyskując wynik operacji splotu $g(t)$ i $h(t)$:

$$g(t) \star h(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} e^{-3t} (e^{-3u})'_1, & 1 \leq t < 1,5 \end{cases} \quad (2.64)$$

$$g(t) \star h(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} e^{-3t} (e^{3u})'_{t-0,5}, & 1,5 \leq t < 2 \end{cases} \quad (2.65)$$

$$g(t) \star h(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} e^{-3t} (e^{3u})'_2, & 2 \leq t < 2,5 \end{cases} \quad (2.66)$$

Podstawiając granice otrzymujemy:

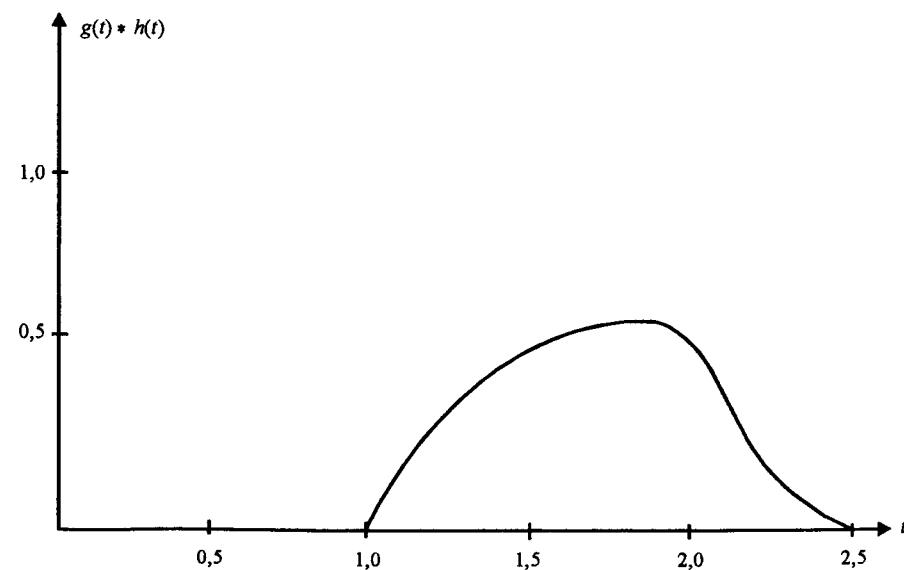
$$g(t) \star h(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} (1 - e^{-3t(t-1)}), & 1 \leq t < 1,5 \end{cases} \quad (2.67)$$

$$g(t) \star h(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} e^{-3t} (e^{-3t} - e^{3t} e^{1,5}), \\ = 0,5179, & 1,5 \leq t < 2 \end{cases} \quad (2.69)$$

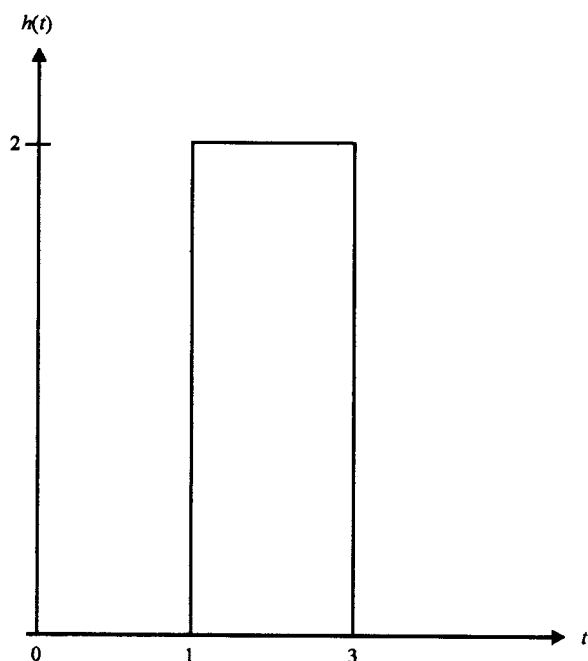
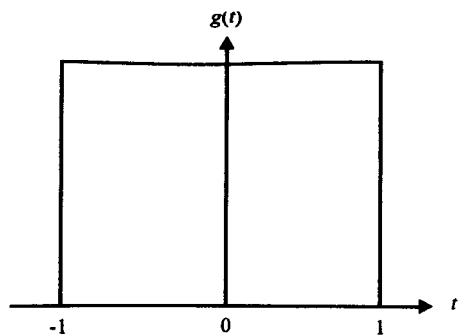
$$g(t) \star h(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} e^{-1,5} (e^{(3t-7,5)} - 1), & 2 \leq t < 2,5 \end{cases} \quad (2.70)$$

Wyniki opisane wzorami (2.66) i (2.67) zilustrowano na rys. 2.28, aby pokazać obrazowo operację splatania $g(t)$ i $h(t)$.

W omawianym przykładzie $g(t)$ świadomie wybrano tak, aby jej wartość zmieniała się w dużym zakresie, co pozwala łatwiej objaśnić proces splatania przebiegów. Wiele prostszych zadań tego typu można rozwiązywać po nabyciu odpowiedniej wprawy w wyznaczaniu splotu w sposób graficzny, bez uciekania się do całkowania przedział po przedziale, jak to miało miejsce w przykładzie właśnie omówionym, gdzie było to dosyć skomplikowane. Jak wynika z rys. 2.28, sygnał splotu należy do przedziału od $t = 1$ do $t = 2,5$. Przedział ten jest sumą przedziałów zajmowanych przez sygnały $g(t)$ i $h(t)$. Zjawisko to zawsze występuje i jest często określane jako „rozpraszanie” lub „rozmazywanie” (ang. *spreading, smearing*). Dokładnie taki sam wynik otrzymuje się, choć po nieco innych rachunkach, gdy zamiast $g(t-u)$ poddać lustrzanemu odbiciu i przesunięciu funkcję $h(t)$. Proponujemy Czytelnikowi powtórne rozwiązanie przykładu 2.8 tym



Rys. 2.28 Przebieg splotu $g(t)$ i $h(t)$



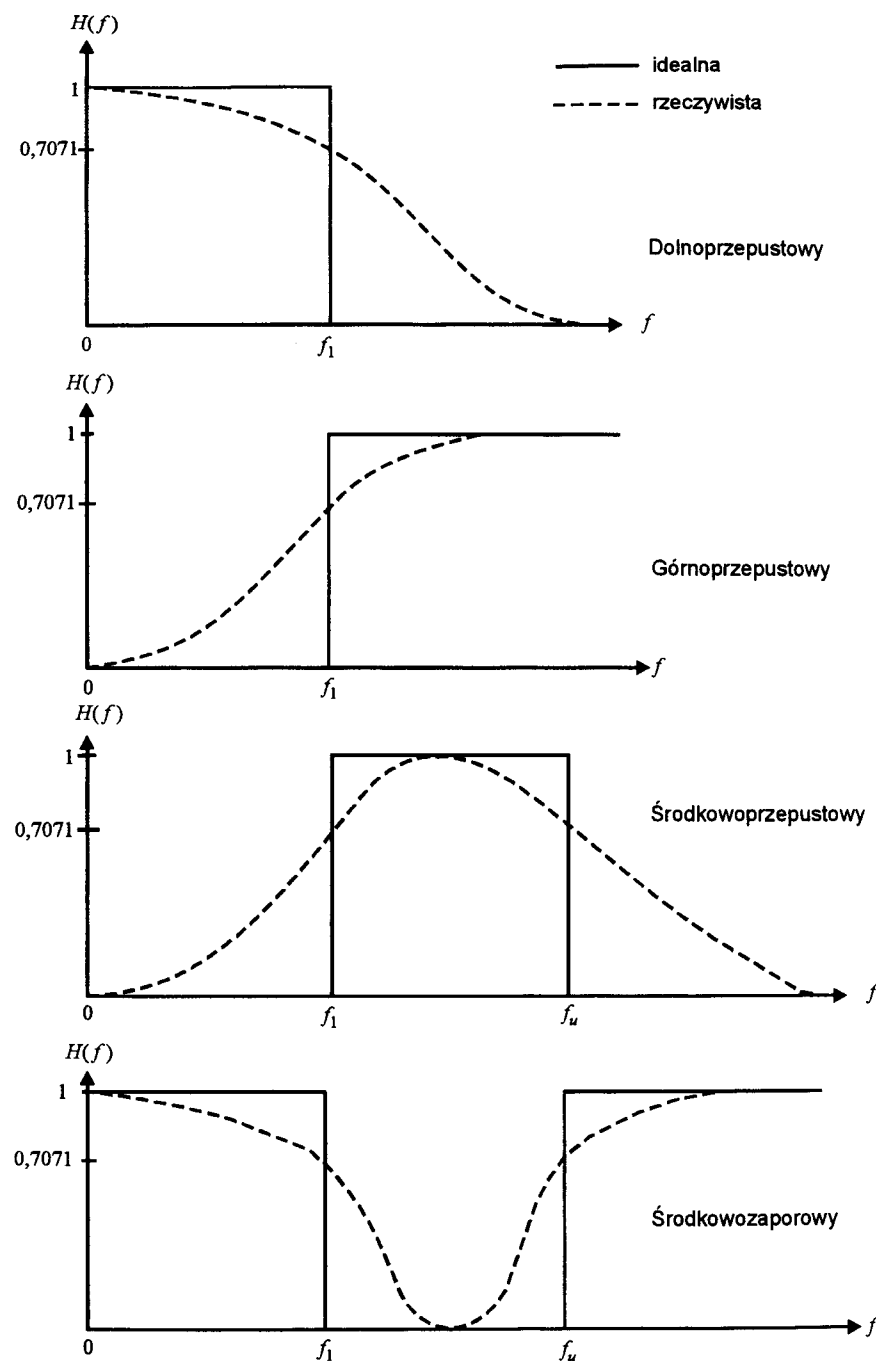
Rys. 2.29

właśnie sposobem. Splot można więc interpretować graficznie jako sumowanie pokrywających się pól, gdy jeden sygnał jest przesuwany względem drugiego.

Ćwiczenie sprawdzające 2.7 Wyznaczyć splot dwu sygnałów z rys. 2.29 posługując się metodą całkowania oraz graficznie.

2.6 FILTRY ANALOGOWE

Filtrem nazywamy układ przepuszczający sygnały o częstotliwościach leżących w ograniczonym zakresie, zwanym **pasmem przepustowym**, i nie przepuszczający sygnałów o częstotliwościach leżących poza tym pasmem. Mamy cztery podstawowe rodzaje



Rys. 2.30 Wyidealizowane charakterystyki filtru

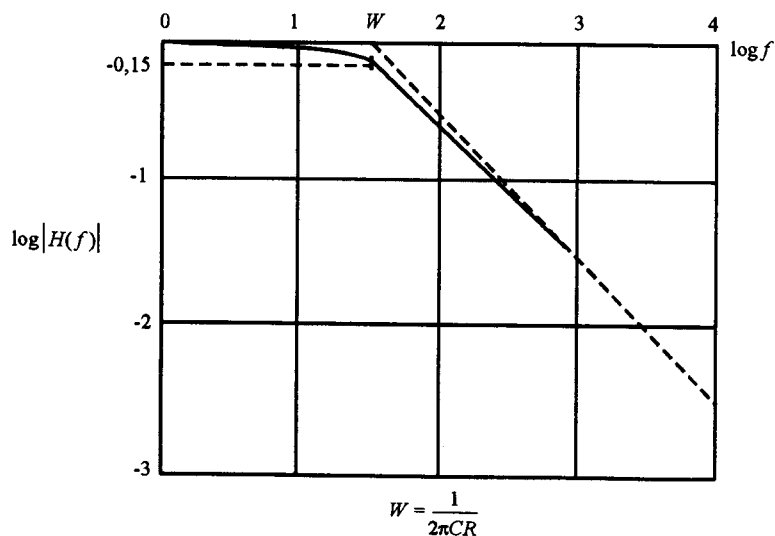
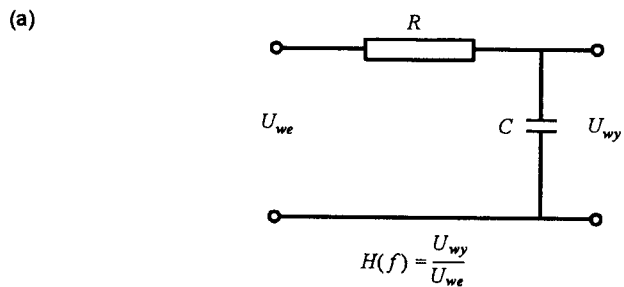
filtrów, a mianowicie dolnoprzepustowe, górnoprzepustowe, pasmowoprzepustowe i pasmowozaporowe (inaczej zerowe, ang. *notch*). Ich wyidealizowane typowe charakterystyki amplitudowe pokazano na rysunku 2.30, gdzie

dolna i górna częstotliwość graniczna jest oznaczona odpowiednio przez f_l i f_u . W praktyce zarówno nachylenie charakterystyki w okolicy częstotliwości granicznych, jak i jej stałość w pasmie przepustowym nie są idealne.

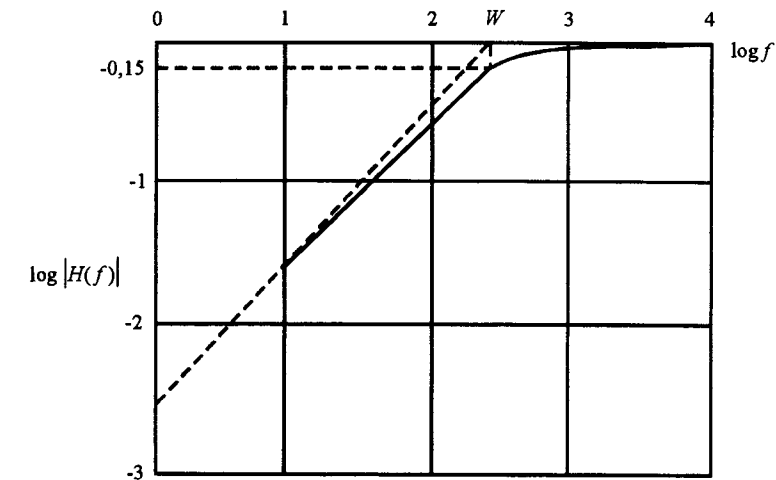
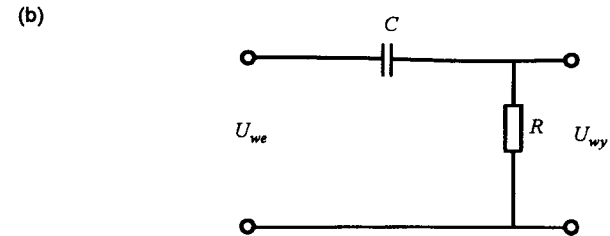
Filtry są szeroko stosowane w systemach telekomunikacyjnych. Są one używane do różnych celów, do których należy selekcja kanału w systemach wielokanałowych, w których poszczególne kanały zajmują sąsiednie pasma częstotliwości. Innym celem stosowania filtrów jest ograniczanie wejściowego zakresu częstotliwości odbiornika do pasma zajmowanego przez oczekiwane sygnały użyteczne. Tym sposobem szumy i/lub zakłócenia o bliskich częstotliwościach są tłumione, przez co polepsza się jakość całego systemu.

Filtry mogą być **pasywne**, gdy nie zawierają elementów aktywnych, takich jak np. tranzystory lub układy scalone. Dwa proste przykłady tego typu filtrów pokazano na rys. 2.31 wraz z ich charakterystykami amplitudowymi gdzie widać, o ile odbiegają one od charakterystyk idealnych.

Filtry zawierające elementy aktywne, zwykle w postaci wzmacniaczy operacyjnych, są nazywane **filtrami aktywnymi**. Podstawową zaletą filtrów aktywnych jest możliwość realizacji wszystkich podstawowych czterech typów za pomocą pasywnych elementów rezystancyjnych i pojemnościowych, R i C , bez konieczności stosowania

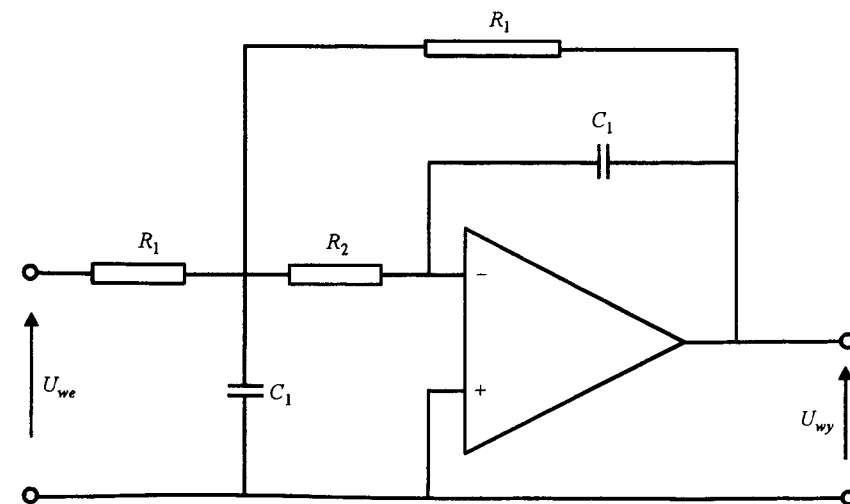


Rys. 2.31a Proste filtry (pasywne): a – dolnoprzepustowy RC;



Rys. 2.31b b – górnoprzepustowy RC

indukcyjności. W rezultacie filtry aktywne mogą być małe i lekkie; mogą być więc umieszczane wewnątrz układów scalonych. Typowy przykład filtru aktywnego pokazano na rys. 2.32.



Rys. 2.32 Aktywny filtr dolnoprzepustowy

2.7 WSTĘP DO CYFROWEGO PRZETWARZANIA SYGNAŁÓW

Cyfrowe przetwarzanie sygnałów (CPS) związane jest z okresowym próbkowaniem sygnałów, zwykle za pomocą przetwornika analogowo-cyfrowego (A/D). Ciąg próbek zostaje zamieniony na ciąg liczb, jaki może być poddawany dalszemu przetwarzaniu za pomocą technik komputerowych. Przetwarzanie sygnałów dokonywane w technice analogowej za pomocą układów elektronicznych może być tak samo dobrze realizowane cyfrowo w stosunku do sygnałów cyfrowych uzyskiwanych poprzez przetworniki analogowo-cyfrowe pod warunkiem, iż zostaną spełnione pewne warunki, o których powiemy w następnym punkcie. Techniki DSP są bardzo atrakcyjne, gdyż opierają się na oprogramowaniu, przez co ich stosowanie okazuje się proste i wygodne. DSP jest często tańsze, a także bardziej niezawodne i precyzyjne od alternatywnych technik analogowych.

2.7.1 Próbkowanie

Przypuśćmy, że próbkujemy dowolny przebieg $g(t)$ w sposób okresowy co T sekund. Załóżmy dalej, iż operacja próbkowania jest idealna, przy czym sygnał $g(t)$ jest mnożony przez sygnał próbkujący $s(t)$. W praktyce przyjmuje się, że $G(f)$, transformata Fouriera z $g(t)$, ma pasmo ograniczone do częstotliwości W herców.

Sygnał próbkujący $s(t)$ jest postaci:

$$s(t) = \text{rep}_T[\delta(t)] \quad (2.71)$$

Oznacza to, iż $s(t)$ jest funkcją okresową o okresie T . W tym przypadku jest to okresowy ciąg delta-funkcji. W wyniku próbkowania w dziedzinie czasu powstaje funkcja $k(t)$, będąca iloczynem funkcji $g(t)$ i $s(t)$:

$$k(t) = g(t) \cdot s(t) = \quad (2.72)$$

$$= g(t) \cdot \text{rep}_T[\delta(t)] \quad (2.73)$$

Celem znalezienia widma $K(f)$ można obliczyć splot $G(f)$ i transformaty Fouriera funkcji próbkującej $s(t)$. Biorąc wzór C.2.6 z dodatku C mamy parę transformat Fouriera:

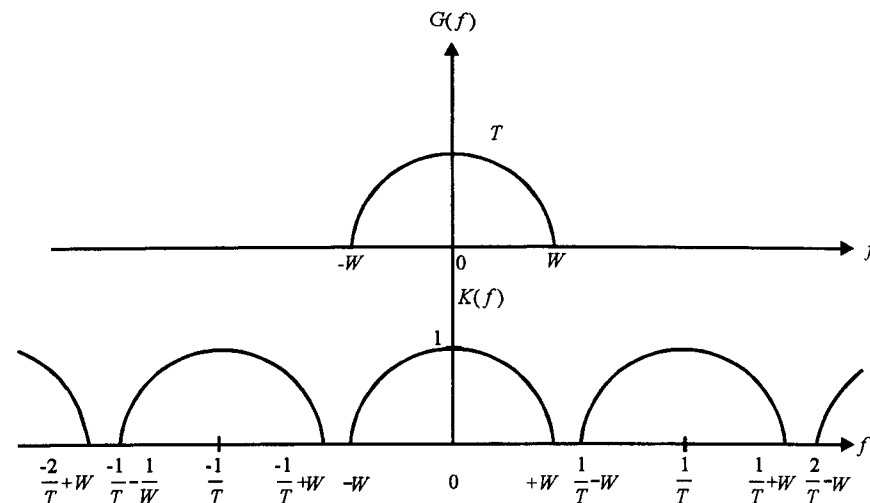
$$\text{rep}_T[g(t)] \leftrightarrow G(f) \cdot \frac{1}{T} \text{rep}_{1/T}[\delta(f)] \quad (2.74)$$

Korzystając ze wzoru (2.71) i wiedząc, że transformata Fouriera delta-funkcji wynosi 1, możemy napisać transformatę Fouriera z $s(t)$ występującą we wzorze (2.74):

$$S(f) = 1 \cdot \frac{1}{T} \text{rep}_{1/T}[\delta(f)] \quad (2.75)$$

Wobec tego $K(f)$ wynosi:

$$K(f) = G(f) \star \frac{1}{T} \text{rep}_{1/T}[\delta(f)] \quad (2.76)$$

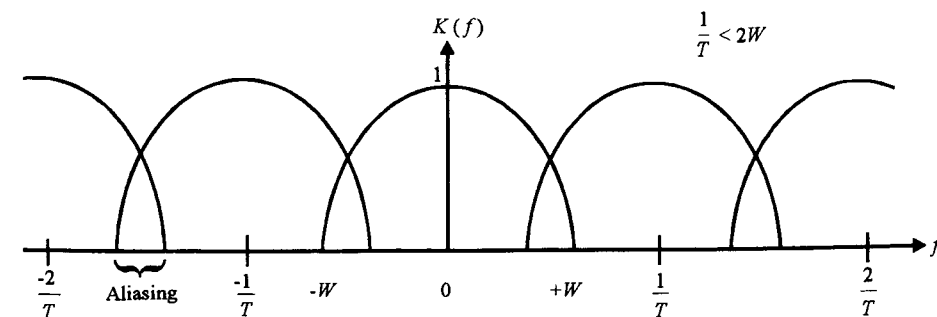


Rys. 2.33 Widmo sygnału spróbkowanego

To widmo $K(f)$ zostało przedstawione na rys. 2.33 i jest jak widać okresowym przedłużeniem widma sygnału oryginalnego $G(f)$ na całej osi częstotliwości z okresem $1/T$ Hz. Aby przesyłać taki sygnał wymagany jest tylko jeden segment widma $G(f)$. Można to uzyskać przepuszczając $K(f)$ przez filtr dolnoprzepustowy o częstotliwości granicznej W Hz. Na jego wyjściu otrzymamy widmo $G(f)$ ześrodkowane wokół 0 Hz, a pozostałe przesunięte segmenty $G(f)$ tworzące widmo $K(f)$ zostaną odfiltrowane.

Istnieje graniczna wartość częstotliwości próbkowania f_s dla funkcji próbkującej $s(t)$. Gdy stanie się ona zbyt mała tak, iż $1/T \leq 2W$, to poszczególne segmenty widma $G(f)$ będą na siebie zachodzić, jak na rys. 2.34.

Opisane zjawisko zachodzenia na siebie segmentów widma powoduje, że składowe o wyższych częstotliwościach jednego segmentu nakładają się na składowe o niskich częstotliwościach sąsiedniego segmentu. Widmo dla danej częstotliwości nie pochodzi wówczas jedynie od oryginalnego sygnału z pasma podstawowego, lecz zawiera także zakłócające składowe pochodzące od sąsiedniego segmentu. Zjawisko to znane jest pod nazwą **aliasingu**. Gdy aliasing się pojawi, oryginalny sygnał zostaje tym samym



Rys. 2.34 Wpływ zbyt małej częstotliwości próbkowania

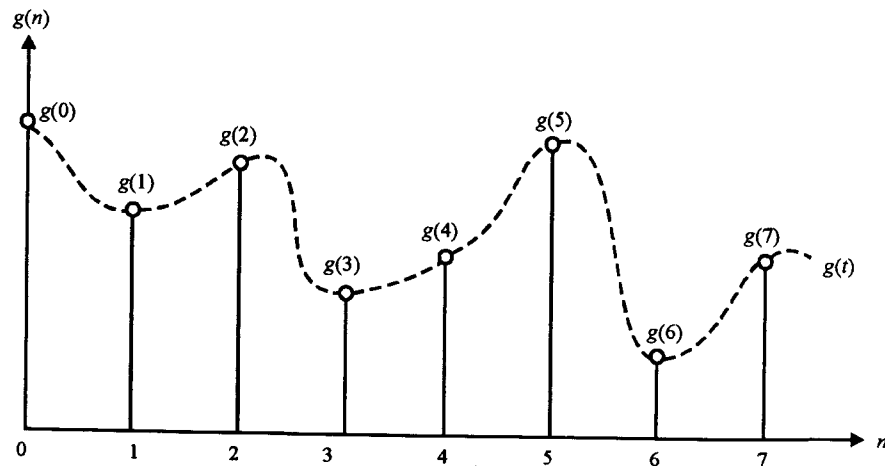
zakłócony i nie można już go poprawnie zrekonstruować. Dla zapobieżenia aliasingowi trzeba spełnić **kryterium Nyquista**. Zgodnie z tym kryterium częstotliwość próbkowania powinna być przynajmniej dwa razy większa od największej częstotliwości widma próbkowanego sygnału:

$$f_s \geq 2W \quad (2.77)$$

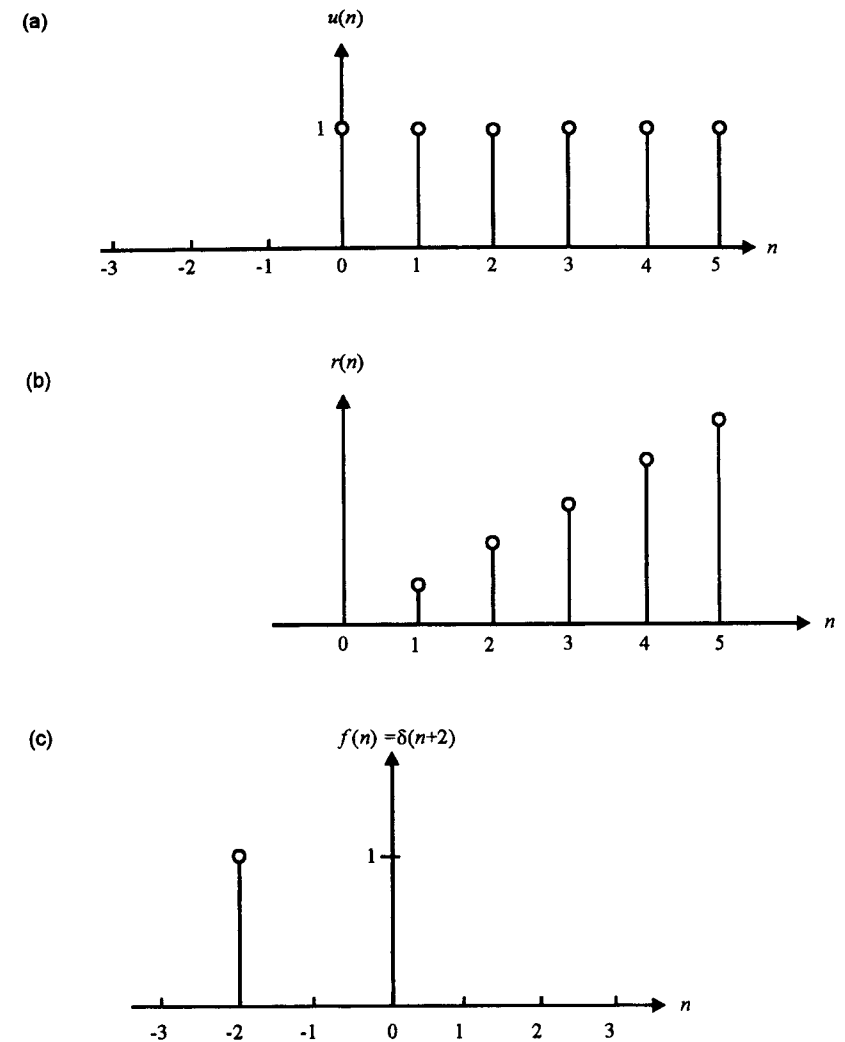
2.7.2 Reprezentacja sygnałowa ciągu liczbowego

W ostatnim punkcie pokazaliśmy, jak się próbkuje sygnał $g(t)$ równomiernie z okresem T . Spróbkowany sygnał można opisać za pomocą funkcji $g(n)$ jak na rys. 2.35. Przedstawia ona ciąg amplitud sygnału $g(t)$ branych dla kolejnych chwil próbkowania o numerze n . Ponieważ jednak próbka pobierana jest co T sekund, ciąg ten może być nadal uważany za sygnał w dziedzinie czasu. Do celów CPS można natomiast rozpatrywać $g(n)$ jako ciąg wartości, lub liczb, znany jako **ciąg liczbowy**. Przyjmując, że przedział próbkowania T jest dostatecznie krótki, aby spełnione było kryterium Nyquista, ten ciąg liczbowy zawiera, jak to pokazano już w punkcie 2.7.1, całą oryginalną informację zawartą w sygnale $g(t)$. Niektóre standardowe sygnały cyfrowe reprezentowane w postaci ciągów liczbowych pokazano na rys. 2.36.

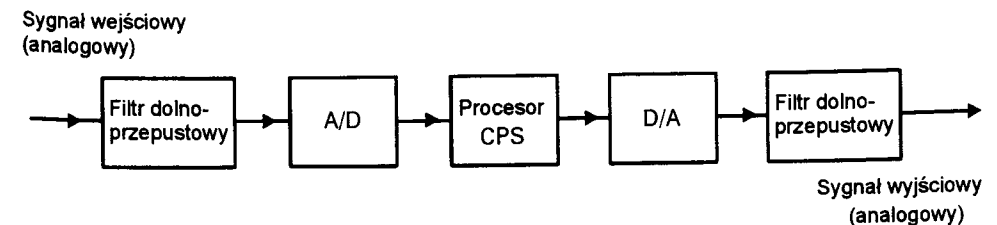
Mając do dyspozycji alternatywną formę reprezentacji sygnału w postaci ciągu liczbowego można dokonywać cyfrowego przetwarzania sygnałów za pomocą komputera lub innych urządzeń zaopatrzonych w mikroprocesory sygnałowe, specjalnie przystosowanych do DSP. Wykonują one takie typowe dla CPS operacje jak mnożenie, spłot, transformata Fouriera, modulacja, filtracja itd. Kompletny system cyfrowego przetwarzania sygnałów składa się z elementów pokazanych na rys. 2.37. Wspomnieliśmy już wcześniej o potrzebie stosowania przetworników analogowo-cyfrowych (A/D). Prócz nich stosowane są przetworniki cyfrowo-analogowe (D/A) służące do przekształcania sygnałów przetworzonych cyfrowo z powrotem do postaci analogowej. Filtry stosowane w obu typach przetworników mają charakter dolnoprzepustowy. Filtr wejściowy dokonuje eliminacji



Rys. 2.35 Sygnał jako ciąg liczbowy



Rys. 2.36 Cyfrowa reprezentacja sygnału: a – skok jednostkowy $u(n) = 0, n < 0$; $u(n) = 1, n \geq 0$; b – przebieg liniowy $r(n) = ku(n)$, gdzie k – stała określająca gradient; c – delta $f(n) = \delta(n+2)$



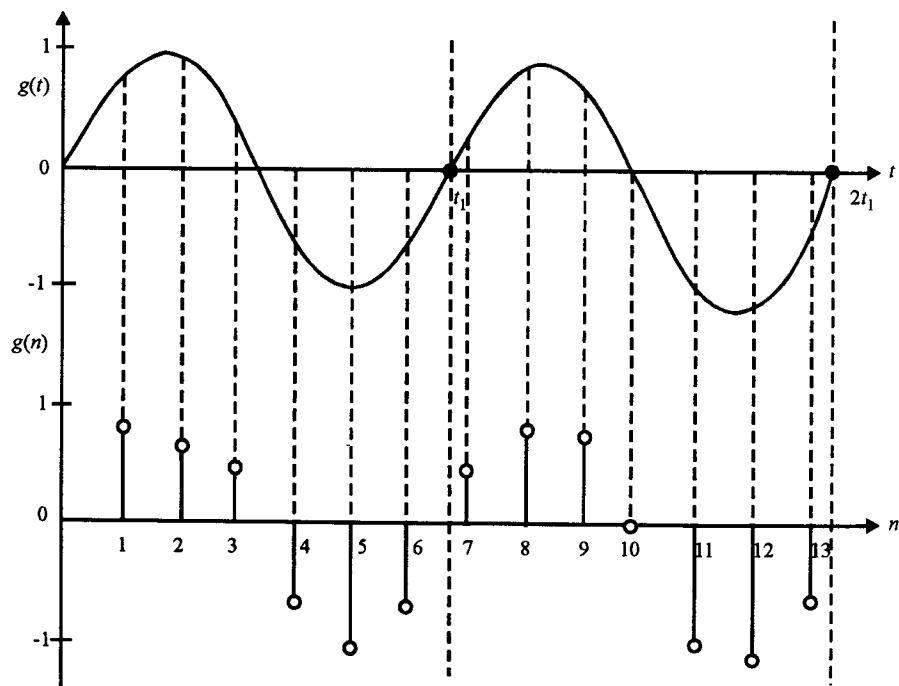
Rys. 2.37 System DSP

wszystkich częstotliwości leżących powyżej najwyższej częstotliwości sygnału informacyjnego. Zapobiega to zjawisku aliasingu przy próbkowaniu dokonywanym za pomocą ADC. Filtr wyjściowy przepuszcza tylko pożądane widmo, obcinając wszystkie składowe częstotliwościowe wyższego rzędu, jakie mogłyby wystąpić w trakcie procesu próbkowania, jak już pokazano na rys. 2.33.

Cyfrowe przetwarzanie sygnałów ma szereg zalet. Proces CPS jest bardzo stabilny i niezawodny, nie podlega dryftom i zmianom parametrów, spotykanym w niektórych układach analogowych. Otwiera także możliwość wykonywania pewnych operacji niemożliwych do zrealizowania przy przetwarzaniu analogowym. Przykładowo, $g(n)$ można łatwo zapamiętywać w pamięci komputera i dlatego nie zawsze zachodzi potrzeba przetwarzania w czasie rzeczywistym.

Interesujące jest porównanie cyfrowej reprezentacji fali sinusoidalnej z jej odpowiednikiem analogowym. Za wyjątkiem przypadku, gdy liczba próbek N przypadająca na jeden okres oryginalnej fali analogowej jest dokładnie wielokrotnością jej okresu T , reprezentacja cyfrowa tej fali nie jest okresowa. Nie jest to samo w sobie wadą, lecz jako zjawisko może spowodować nieporozumienia przy analizie odpowiednich ciągów liczbowych. Jeśli tylko częstotliwość próbkowania jest dostatecznie duża, $g(t)$ mimo wszystko zawiera całą informację potrzebną do prawidłowego zrekonstruowania oryginalnej fali sinusoidalnej.

Na rysunku 2.38 pokazano, jak fala sinusoidalna o okresie t_1 zostaje spróbkowana i jak powstają poszczególne próbki cyfrowe. Zauważmy, iż w praktyce sygnały przemienne (ac) zostają tak przesunięte przez dodanie składowej stałej (dc), aby powstał



Rys. 2.38 Reprezentacja cyfrowa fali sinusoidalnej

sygnał jednobiegunowy, odpowiedni ze względu na jednobiegunową charakterystykę większości przetworników analogowo-cyfrowych (A/D). Rysunek ten jasno pokazuje omówioną powyżej sytuację, gdy częstotliwość próbkowania nie jest dokładnie wielokrotnością częstotliwości fali sinusoidalnej. W rezultacie próbki brane od 0 do t_1 nie są identyczne jak odpowiednie próbki następnego okresu od t_1 do $2t_1$, np. $g(1)$ i $g(2)$ są pierwszymi próbkami dwu sąsiednich okresów, lecz nie występują dokładnie w tym samym względnym momencie czasu (w tej samej fazie oryginalnej fali analogowej, *przyp. tłum.*) i dlatego mają różne wartości.

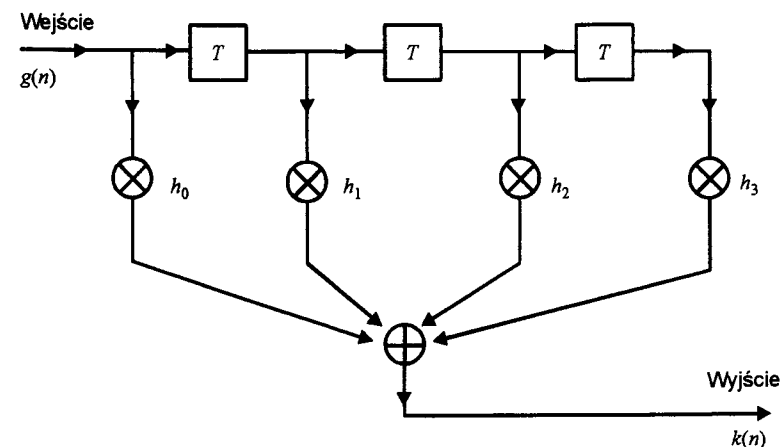
2.8 FILTRY CYFROWE

Filtry cyfrowe są to po prostu filtry realizowane za pomocą techniki cyfrowego przetwarzania sygnałów. Są dwa rodzaje filtrów cyfrowych. Zaczniemy od filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej (SOI) o schemacie blokowym pokazanym na rys. 2.39. Pierwsza próbka, powiedzmy g_0 , wejściowego ciągu liczbowego jest mnożona przez współczynnik h_0 i pojawia się na wyjściu filtru jako k_0 . (Z uwagi na brak sygnału w czasie okresu próbkowania, żadne próbki nie dochodzą na wyjście poprzez mnożniki od h_1 do h_3 .) Każda z gałęzi od h_0 do h_3 nazywa się **odczepem**. W układzie mamy ponadto szereg elementów opóźniających o czas T będący okresem próbkowania w odbiorniku. Impuls wejściowy g_0 dochodzi do układu mnożącego h_1 po jednym okresie opóźnienia, kiedy to próbka g_1 pojawia się na wejściu. Dlatego w chwili $t = 0$ na wyjściu mamy sygnał k_0 równy $g_0 h_0$. Dla t równego T , sygnał wyjściowy k_1 jest równy $g_0 h_1$ plus czynnik $g_1 h_0$ od nowego impulsu wejściowego. Ten proces trwa przez czas T i Czytelnik może go prześledzić wyznaczając k_2 , k_3 itd., aż do otrzymania pełnej odpowiedzi czasowej filtru SOI.

Na podstawie zależności podanej w punkcie 2.7 możemy wywnioskować, że $k(n)$ stanowi splot $g(n)$ i $h(n)$.

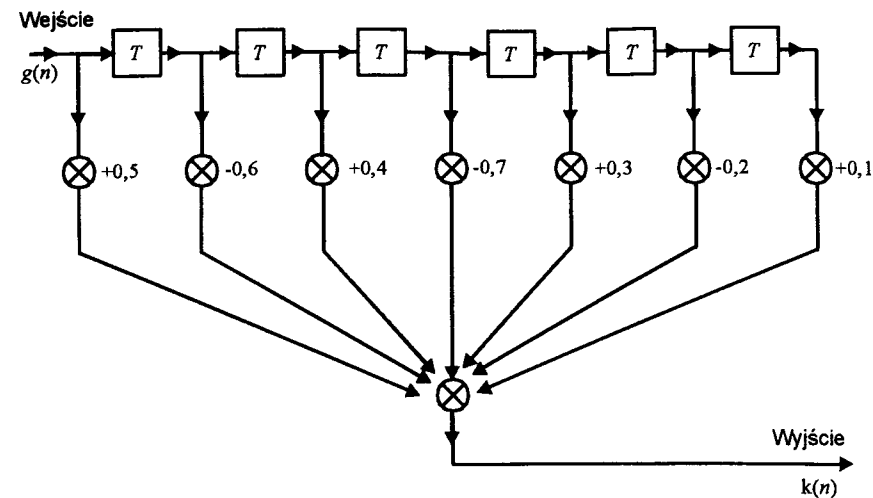
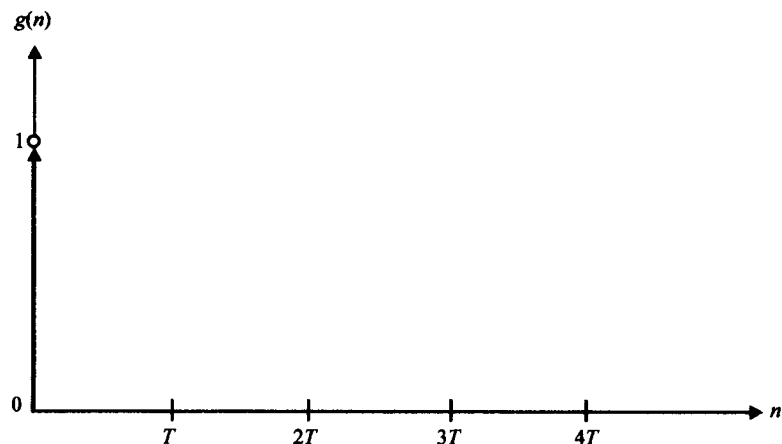
$$k(n) = g(n) * h(n) \quad (2.78)$$

Sygnał $k(n)$ jest znany pod nazwą **sumy splotowej** $g(n) * h(n)$. Wyjście filtru stanowi sumę iloczynów $g(n)$ i $h(n)$ dla kolejnych n .



Rys. 2.39 Filtr SOI

Aby zbadać charakterystykę częstotliwościową filtru potrzebny jest sygnał o stałej amplitudzie i nieograniczonym zakresie częstotliwości. Można go uzyskać za pomocą impulsu $\delta(t)$. Weźmy pod uwagę ponownie filtr pokazany na rys. 2.39.



Rys. 2.41

Przyjmijmy, że mnożniki h_1 i h_3 są ujemne. Wyjście takiego filtru pokazano na rys. 2.40. Po czasie $3T$ od pojawienia się pierwszego impulsu wyjście filtru pozostaje równe zeru.

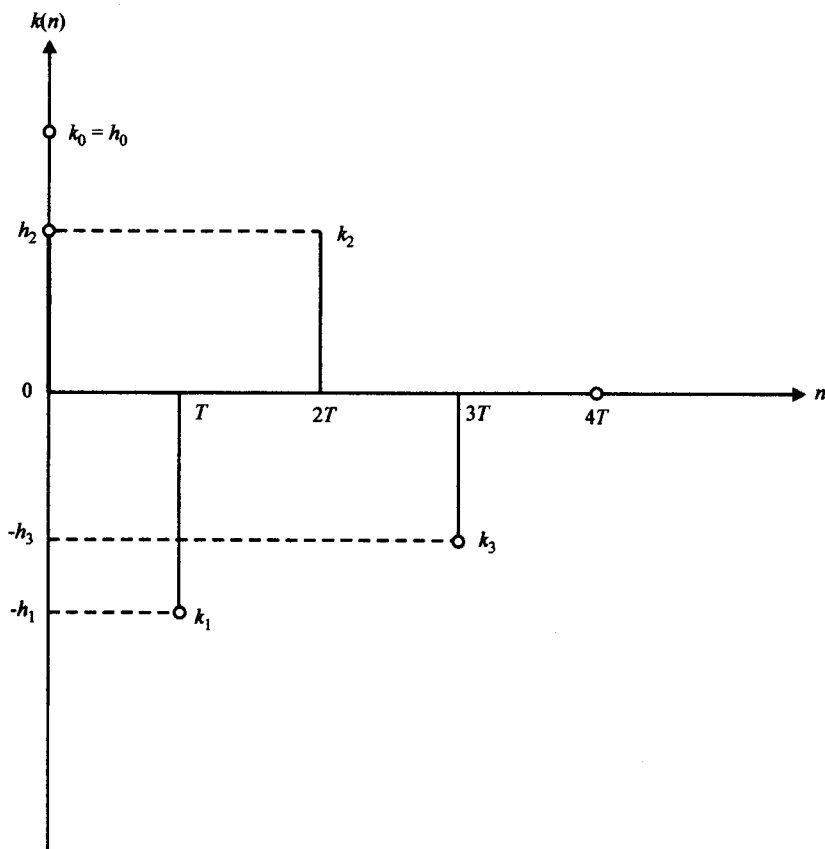
Filtr SOI jest tak nazywany, gdyż jak zobaczyliśmy odpowiedź tego filtru wygasa po N próbkach od pojawienia się pierwszego impulsu wejściowego, gdzie N jest po prostu liczbą elementów opóźniających, lub odczepów. Oznacza to właśnie, że jest to filtr o **skończonej odpowiedzi impulsowej**. Na rysunku 2.39 pokazano zarazem sposób realizacji filtru SOI. Potrzebna jest struktura wykonująca mnożenia (przez każdy ze współczynników wagi), dodawania i kolejne zapamiętywanie przychodzących impulsów. Zapamiętywanie impulsu w postaci liczby przez ustalony okres opóźnienia, dodawanie i mnożenie należą do typowych operacji możliwych do zrealizowania w postaci układowej, za pomocą komputera lub wyspecjalizowanego systemu DSP.

Ćwiczenie sprawdzające 2.8 Naszkicować odpowiedź impulsową filtru SOI pokazanego na rys. 2.41.

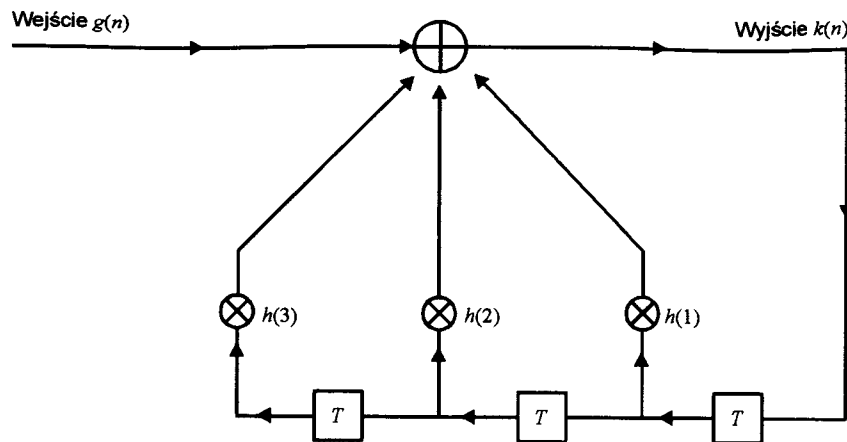
Na rysunku 2.42 pokazano **filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (NOI)** z trzema odczepami. W odróżnieniu od poprzednio rozpatrywanego filtru SOI, wszystkie trzy odczepy tworzą pętlę **sprężenia zwrotnego** z wejściem filtru, a nie **sprężenie w przód** występujące w filtrach SOI.

Odpowiedź impulsowa filtru NOI jest trudniejsza do wyznaczenia, niż w przypadku filtru SOI. Na podstawie podanego rysunku można wypisać wyrażenie dla $k(n)$ w postaci:

$$\begin{aligned}
 k(n) = & g(0) + [g(0)]h(1) + [g(0)h(1)]h(1) + [g(0)]h(2) + \\
 & + [g(0)h(1)h(1) + g(0)h(2)]h(1) + [g(0)h(1)]h(2) + \\
 & + [g(0)]h(3) + [g(0)h(1)h(1)h(1) + g(0)h(2)h(1) + \\
 & + g(0)h(2)h(1) + g(0)h(3)h(1) + [g(0)h(1)h(1) + \\
 & + g(0)h(2)]h(2) + [g(0)h(1)]h(3) \text{ itd.}
 \end{aligned} \tag{2.79}$$



Rys. 2.40 Odpowiedź filtru SOI



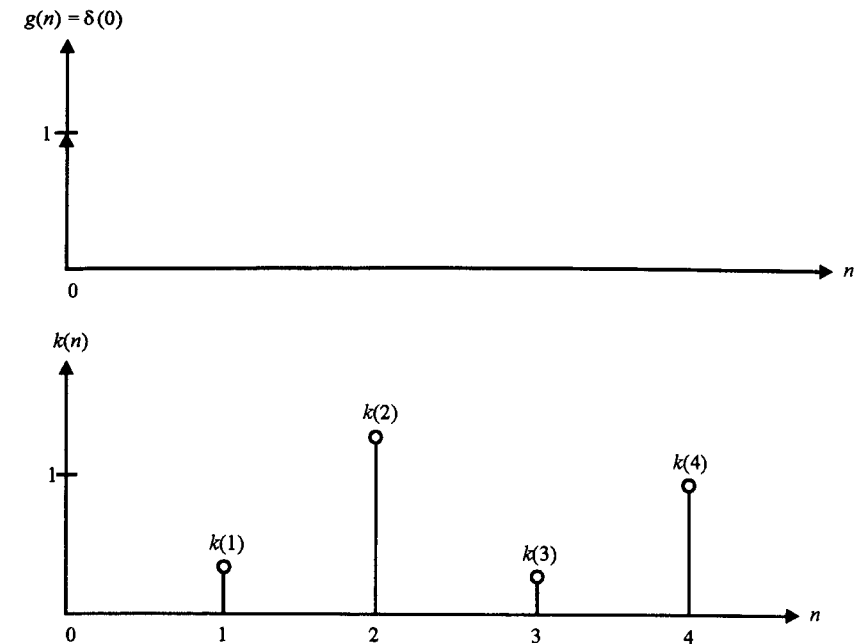
Rys. 2.42 Filtr NOI

Tę odpowiedź przedstawiono na rys. 2.43, gdzie:

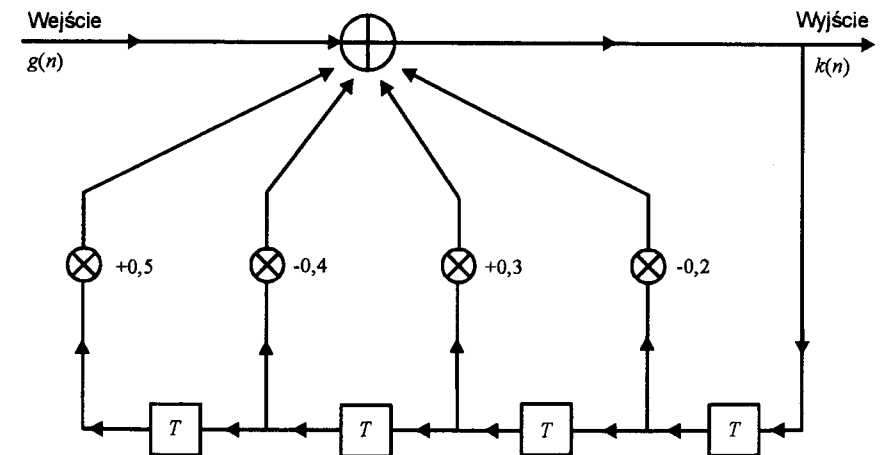
$$\begin{aligned}
 k(0) &= g(0) \\
 k(1) &= [g(0)]h(1) \\
 k(2) &= [g(0)h(1)]h(1) + [g(0)]h(2) \\
 k(3) &= [g(0)h(1)h(1) + g(0)h(2)]h(1) + [g(0)h(1)]h(2) + [g(0)]h(3) \\
 k(4) &= [g(0)h(1)h(1)h(1) + g(0)h(2)h(1) + g(0)h(2)h(1) + g(0)h(3)h(1) + \\
 &\quad + [g(0)h(1)h(1) + g(0)h(2)]h(2) + [g(0)h(1)]h(3) \text{ itd.}
 \end{aligned}
 \tag{2.80}$$

Aby zaprojektować filtr cyfrowy przy założonych wymaganiach na częstotliwość graniczną i nachylenie charakterystyki, można wybrać jedną ze znanych charakterystyk filtru analogowego, jak np. charakterystykę Czebyszewa danego rzędu. Mając tę charakterystykę jest matematycznie możliwe (np. za pomocą z-transformaty) wyznaczenie odpowiadającej jej charakterystyki filtru cyfrowego, w postaci ciągu liczbowego. Na tej podstawie łatwo już podać strukturę filtru, możliwego do zrealizowania w formie układowej, a częściej w postaci programowej z użyciem dogodnej platformy CPS. Taka metoda projektowania jest jednak matematycznie uciążliwa i podatna na błędy. Technika cyfrowego przetwarzania sygnałów rozwinęła się jednak już na tyle, że producenci oprogramowania CPS oferują wiele pakietów służących do projektowania filtrów, pozwalających bezpośrednio określić liczbę odczepów i ich wagi, przy zadanych wymaganiach na filtr. Technika ta pozwala na zaprojektowanie filtru NOI, zawierającego przy tych samych parametrach mniejszą liczbę odczepów. Filtry NOI mają jednak w porównaniu do filtrów SOI gorszą charakterystykę fazową.

Ćwiczenie sprawdzające 2.9 Naszkicować odpowiedź impulsową filtru NOI pokazanego na rys. 2.44.



Rys. 2.43 Odpowiedź impulsowa filtru NOI



Rys. 2.44

2.9 PODSUMOWANIE

Analiza fourierowska pozwala na określenie związku między reprezentacjami sygnału w dziedzinie czasu i częstotliwości. Szereg Fouriera pozwala wyznaczyć widmo sygnału okresowego w dziedzinie czasu. Do wyznaczania widm sygnałów nieokresowych posługujemy się natomiast transformatą Fouriera. Odwrotna transformata Fouriera pozwala z kolei wyznaczyć czasową postać sygnału na podstawie jego widma.

Wiele sygnałów ma postać standardową lub może być przedstawionych w postaci pewnej ich kombinacji. W takich przypadkach można często uniknąć długich rachunków wymaganych przy analizie fourierowskiej, gdy korzystamy z opublikowanych tablic szeregów i transformat Fouriera. Gdy sygnał jest ciągły w czasie, jego widmo jest skończone i vice versa. Ta właściwość jest użyteczna przy rozpatrywaniu szerokości pasma danego sygnału.

Splot i mnożenie są odwrotnymi, a więc dualnymi operacjami przetwarzania sygnałów. Splot w jednej dziedzinie jest odpowiednikiem mnożenia w drugiej dziedzinie. Fakt ten okazuje się bardzo użyteczny, gdyż przy rozwiązywaniu określonego zadania jedna z tych dwu operacji okazuje się zwykle prostsza do wykonania.

Znane są filtry realizujące szeroki zakres charakterystyk o określonych pasmach przepustowych lub zaporowych. Filtry takie mogą być pasywne, aktywne lub cyfrowe.

Cyfrowe przetwarzanie sygnałów opiera się na technice próbkowania, pozwalającej na sprowadzenie sygnału do postaci cyfrowej. W tej postaci, sygnał jest po prostu ciągiem liczb i można go dalej przetwarzać cyfrowo różnymi sposobami, opartymi z reguły na technice komputerowej. Cyfrowe przetwarzanie sygnałów jest zwykle tańsze i zapewnia większą dokładność i niezawodność niż inne metody. Niektóre techniki przetwarzania mogą być zresztą realizowane jedynie drogą cyfrową. Jednym z najczęściej stosowanych rodzajów cyfrowego przetwarzania sygnałów jest filtracja cyfrowa.

Można w tej technice zrealizować znakomite filtry, często znacznie lepsze od ich analogowych odpowiedników. Mamy dwa podstawowe typy filtrów cyfrowych. Filtry SOI wyposażone są w odczepy ze sprzężeniem „w przód”, co prowadzi do odpowiedzi impulsowej równej zero poza skończonym przedziałem czasowym, zależnym od liczby odczepów. W filtrach NOI występuje natomiast sprzężenie zwrotne dające odpowiedź impulsową trwającą w czasie nieskończenie długo. Oba te rodzaje filtrów cyfrowych mają określone zalety.

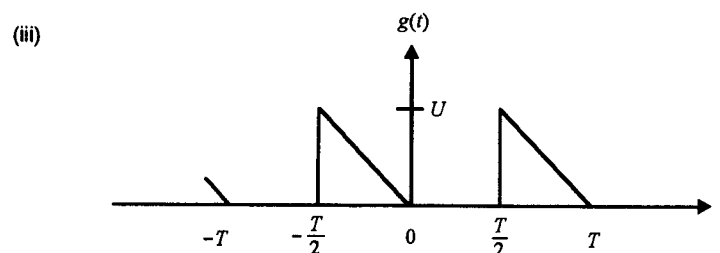
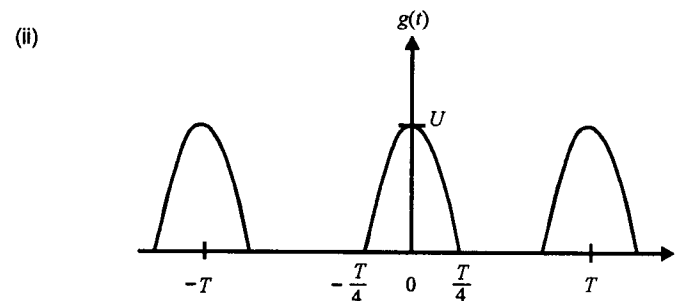
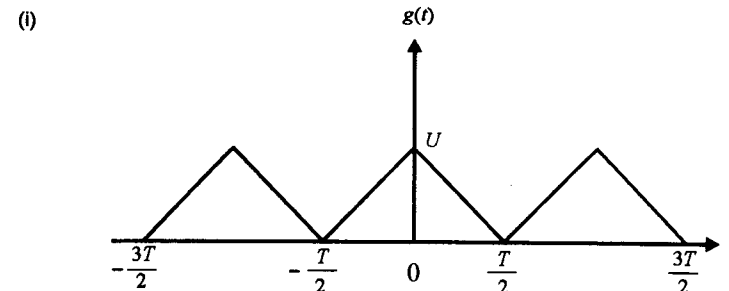
Zadania

2.1. Dla każdego z przebiegów okresowych pokazanych na rys. 2.45:

- Sprawdzić, czy istnieje jakiś rodzaj symetrii.
- Wyznaczyć widma częstotliwościowe podanych przebiegów czasowych. Wykorzystać ewentualne symetrie dla uproszczenia rachunków. Tam gdzie to możliwe, porównać wyniki z podanymi w tablicach szeregów Fouriera.

2.2. Dla funkcji $g(t)$ z rys. 2.46 wyznaczyć:

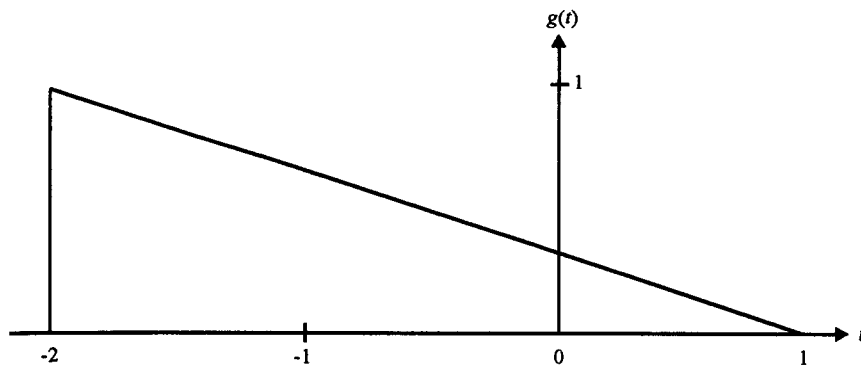
- $g(-t)$
- $g(t/4)$
- $g(3-t)$
- $g(t/4 + 1)$
- $g((t+1)/4)$



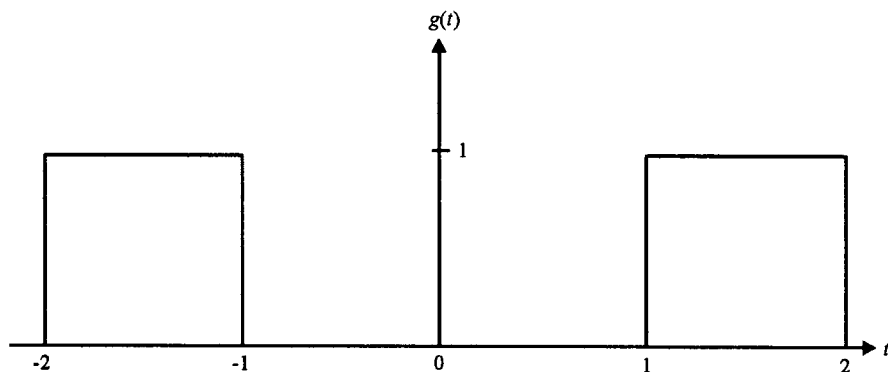
Rys. 2.45

2.3. Wyznaczyć transformatę Fouriera sygnału pokazanego na rys. 2.47:

- za pomocą podstawowych właściwości wynikających ze wzoru (2.25);
- używając tablic transformat Fouriera, biorąc pod uwagę, że $g(t)$ może być rozpatrywana jako para impulsów przesuniętych w czasie.



Rys. 2.46



Rys. 2.47

- 2.4. Przebieg pokazany na rys. 2.48 jest zdefiniowany zależnością:

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ e^t, & t < 0 \end{cases}$$

Wyznaczyć transformatę Fouriera z $g(t)$ za pomocą właściwości podstawowych. Sprawdzić wynik używając tablic transformat Fouriera.

- 2.5. Dla każdej z funkcji pokazanych na rys. 2.49 wyznaczyć przebieg czasowy:

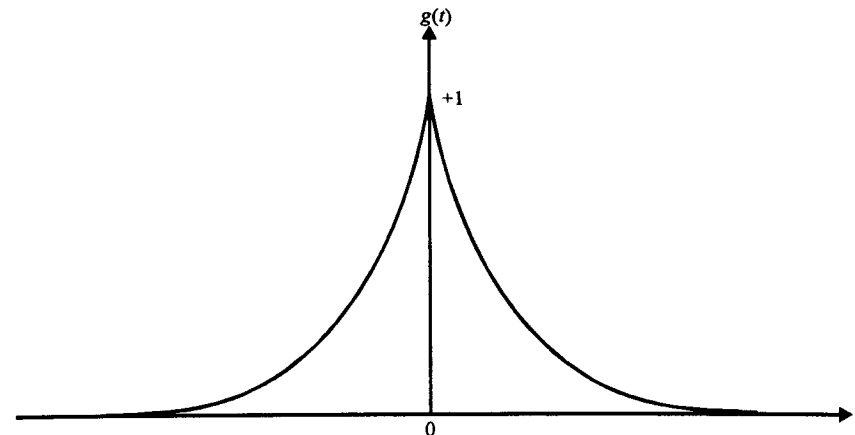
- za pomocą właściwości podstawowych;
- gdzie to możliwe, używając tablic transformat Fouriera.

Naszkicować otrzymane przebiegi.

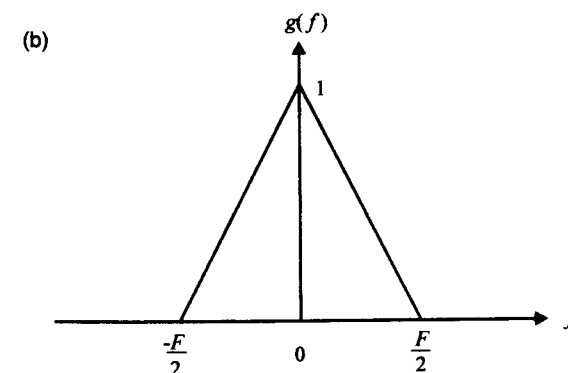
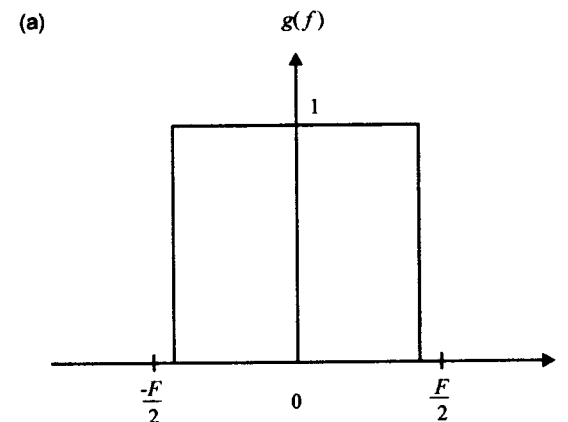
- 2.6. Ze względu na przykład 2.8 i rys. 2.27, wzór (2.59) może być zapisany w równoważnej postaci:

$$g(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot h(t-u) du \quad (2.81)$$

Powtórnie rozwiązać przykład za pomocą ostatniego równania i wykazać, że wynik jest identyczny jak w przykładzie 2.8. Do rozwiązania dołączyć kilka przykładów ilustrujących każdy etap znajdowania splotu metodą graficzną.

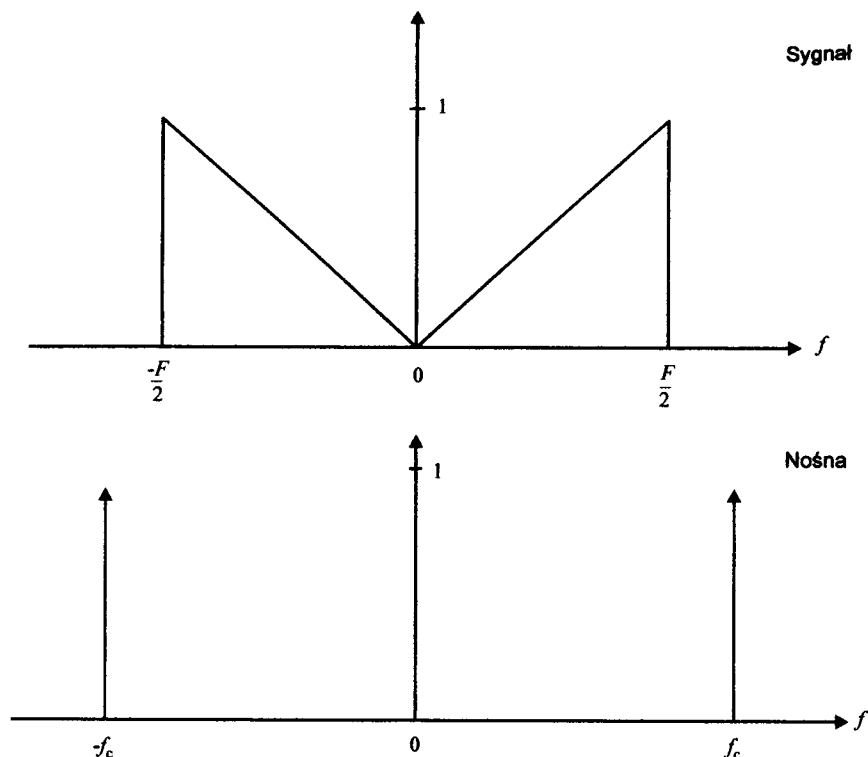


Rys. 2.48



Rys. 2.49

- 2.7. W wielu systemach radioelektronicznych stosuje się takie przesuwanie widma sygnału, aby było ono ześrodkowane wokół tak zwanej „częstotliwości nośnej”, na której jak mówimy dany system pracuje. Można to uzyskać splatając oryginalny sygnał informacyjny z parą delta-funkcji leżących na częstotliwości nośnej.



Rys. 2.50

Dany sygnał i częstotliwość nośną kanału radiowego pokazano na rys. 2.50. Znaleźć splot obu widm, a następnie na odpowiednim rysunku wykazać, iż podane stwierdzenia są słuszne.

- 2.8. Wyjaśnić efekt aliasingu i jego zależność od rodzaju widma sygnału oraz częstotliwości próbkowania.
- 2.9. W odniesieniu do filtrów cyfrowych objaśnić pojęcia:
 - a) SOI;
 - b) NOI;
 - c) sprzężenie w przód;
 - d) sprzężenie zwrotne.

Literatura

- Bracewell, R.N., *The Fourier Transform and its Applications*, wyd. 2, McGraw-Hill, 1978. ISBN 07-066196-0.
 Carlson, A.B., *Communication Systems*, wyd. 3, McGraw-Hill, 1986. ISBN 07-100560-9.
 James, G., *Advanced Modern Engineering Mathematics*, Addison Wesley, 1993. ISBN 0-201-56519-6.
 Lynn, P.A., Fuerst, W., *Introductory Digital Signal Processing with Computer Applications*, John Wiley, 1994. ISBN 0-471-94374-6.
 Stremler, F.G., *Introduction to Communication Systems*, wyd. 3, Addison-Wesley, 1990. ISBN 0-201-51651-0.
 Stroud, K.A., *Further Engineering Mathematics*, Macmillan, 1990. ISBN 0-333-52610-4.

Podano definicję terminu szum. Zidentyfikowano i zmodelowano pewną liczbę przyczyn powstawania szumu, celem ilościowego potraktowania tego zjawiska w układach elektrycznych. Szum termiczny jest podstawowym rodzajem szumu i dlatego jego właściwości oraz związek z temperaturą został wyjaśniony. Opisano model reprezentujący szum wnoszony przez układ elektryczny za pomocą skutecznej temperatury szumów oporu będącego źródłem szumu. Przedstawiono też szum typowy dla systemów radioelektrycznych. Szum odbierany przez antenę jest reprezentowany za pomocą równoważnej temperatury szumów, której typowe wartości zostały podane. Pojęcie równoważnej temperatury szumów zostało uogólnione na przypadek właściwości szumowych odbiornika, opisanych za pomocą temperatury szumów na jego wejściu. Szum towarzyszy zawsze sygnałowi mierzonemu w każdym punkcie wewnątrz systemu. Wprowadzono pojęcie stosunku sygnał-szum i pokazano, że w systemach telekomunikacyjnych dopuszczalny jest pewien poziom szumu. Alternatywnym parametrem względem stosunku sygnał-szum jest współczynnik szumów będący miarą szumu wnoszonego do systemu przez dany układ. Współczynnik szumów pozwala określić liczbowo sumaryczne właściwości szumowe systemu będącego kaskadowym połączeniem pewnej liczby układów elektrycznych.

3.1 WIADOMOŚCI WSTĘPNE O SZUMACH

Szum elektryczny może zostać zdefiniowany jako niepożądana energia towarzysząca sygnałowi w systemie telekomunikacyjnym. Szum towarzyszy każdemu sygnałowi mierzonemu w dowolnym punkcie wewnątrz systemu. Szum ten jest wynikiem kumulowania się pewnej liczby podobnych do siebie a czasem zupełnie różnych przyczyn, z których wiele zostanie opisane w tym rozdziale. Od razu nasuwa się obawa, iż obecność szumu w systemie może okazać się fatalna w skutkach. Choć czasem może tak być, większość systemów działa prawidłowo, gdy sygnałowi towarzyszy pewien ograniczony poziom szumów.

Jednym z przykładów szumu jest **przesłuch**, z którym mamy do czynienia wówczas, gdy np., podczas rozmowy telefonicznej słyszymy jednocześnie inną rozmowę. Odmianą formą szumu są **zakłócenia międzykanałowe** spotykane od czasu do czasu w pewnych systemach telewizyjnych, gdy w nietypowych warunkach atmosferycznych transmisja uzyskuje większy zasięg od normalnego, interferując z transmisją lokalną na zbliżonej częstotliwości.

Szumy w systemach telekomunikacyjnych dzielą się na dwa rodzaje. Niektóre z nich są **wytwarzane przez człowieka** (są **sztuczne**) i mogą zostać wyeliminowane drogą lepszego projektowania systemu, jak np., poprzez zmniejszenie szumów u źródła lub odekranowanie źródeł zakłóceń od wrażliwych elementów układu. Szumy tego rodzaju mają wiele przyczyn, takich jak maszyny elektryczne i wyłączniki oraz pewne typy lamp oświetleniowych. Takie urządzenia jak układy zapłonowe pojazdów mechanicznych, gdy nie są odpowiednio zabezpieczone, mogą zakłócać odbiór radiowy i telewizyjny.

Wielu innych rodzajów szumu nie można uniknąć z tego powodu, iż powstaje w sposób **naturalny**. Wszyscy znamy trzaski słyszane w naszym domowym odbiorniku radiowym podczas wyładowań atmosferycznych. Jest to przykład **szumów atmosferycznych**. Innym źródłem szumu jest promieniowanie dochodzące z kosmosu, znane pod nazwą **szumu kosmicznego**, emitowanego przez gwiazdy w wyniku zachodzących na nich przemian energii. Wiele spośród elementów elektrycznych i elektronicznych generuje szumy w sposób naturalny. Tym zagadnieniem zajmiemy się w następnym punkcie tego rozdziału.

3.2 SZUMY ELEMENTÓW ELEKTRONICZNYCH

Układy elektryczne są zbudowane z elementów pasywnych i aktywnych. Sygnał wyjściowy układu jest wynikiem działania źródeł napięciowych lub prądowych. Wiele układów wytwarza ponadto niepożądane szumy w postaci napięcia lub prądu. Niektóre rodzaje szumu mogą być wytwarzane przez elementy układu w sposób opisany poniżej.

3.2.1 Szum termiczny

Wewnątrz przewodnika elektrycznego lub opornika powstają wolne elektrony generowane z powodu pobudzenia termicznego. Elektrony te poruszają się w sposób przypadkowy, docierając do obu jego końców w przypadkowych momentach czasu. Powoduje to z kolei przypadkowe zmiany różnicy potencjałów między końcówkami przewodnika lub opornika, choć wartość średnia tej różnicy potencjałów wynosi zero. Szum taki jest zwany **szumem termicznym**, gdyż jego energia wzrasta wraz z temperaturą.

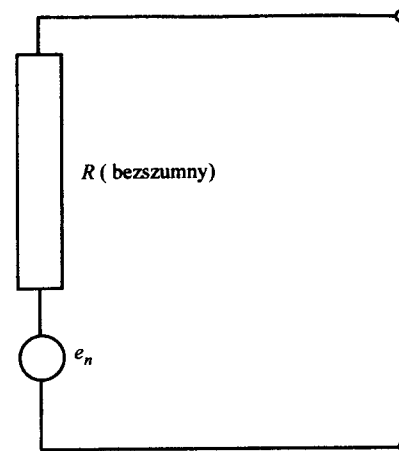
Na rysunku 3.1 pokazano prosty model opornika i związanego z nim napięcia szumów e_n . Napięcie szumów zmienia się w czasie zgodnie z gaussowską funkcją rozkładu prawdopodobieństwa o wartości średniej równej zero. Oznacza to, iż jego znak się zmienia i że jego widmo jest równomiernie rozłożone w zakresie częstotliwości od 0 do około 10^{13} Hz, a więc dużo większym od używanego w systemach telekomunikacyjnych. Gdy zewrzymy zaciski opornika, moc szumów generowanych w oporniku R wynosi:

$$\text{Moc szumu} = 4kTB \quad (3.1)$$

gdzie: k – stała Boltzmanna równa $1,38 \cdot 10^{-23}$ W/kHz;

T – temperatura bezwzględna w kelwinach, K,

B – rozpatrywana szerokość pasma, np. przyrządu pomiarowego lub systemu (zauważmy, iż dla zachowania zgodności oznaczeń stosowanych w literaturze będziemy w tym rozdziale oznaczać szerokość pasma symbolem B , a nie W , jak to czynimy w innych rozdziałach).



Rys. 3.1 Model szumu termicznego

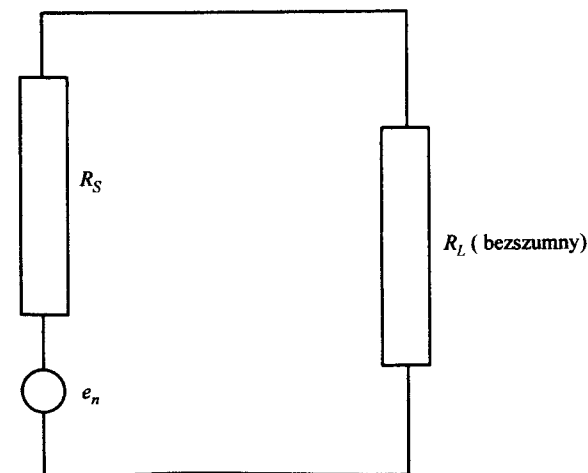
Napięcie szumów e_n jest dane zależnością:

$$\frac{e_n^2}{R} = 4kTB \quad (3.2)$$

$$e_n = \sqrt{4kTBR} \quad (3.3)$$

Z równania (3.3) widać, że napięcie powstające na zaciskach opornika z powodu istnienia szumu termicznego jest funkcją temperatury, szerokości pasma i oporu.

W rzeczywistych systemach ważna jest znajomość mocy szumu dostarczanego do obciążenia. W systemach telekomunikacyjnych źródło jest zazwyczaj dopasowane do obciążenia na maksimum mocy średniej (czynnej). **Dysponowalna moc szumów** jest to maksymalna moc, jaka może być dostarczona do oporu obciążenia. Weźmy pod uwagę



Rys. 3.2 Dysponowalna moc szumów

źródło szumów i opór obciążenia R_L w układzie jak na rys. 3.2. Dysponowalna moc szumów wydzielana w oporze R_L jest równa:

$$P_L = \frac{\overline{e_n^2} \cdot R_L}{(R_s + R_L)^2} \quad (3.4)$$

gdzie e_n – szum generowany w oporze źródła R_s w temperaturze T_s . W warunkach dopasowania, gdy $R_s = R_L$, moc P_L wyniesie:

$$P_L = \frac{\overline{e_n^2}}{4R_L} \quad (3.5)$$

Podstawiając do wzoru (3.5) e_n określone wzorem (3.3) uzyskujemy zależność:

$$P_L = \frac{4kT_s R_s B}{4R_L} = \quad (3.6)$$

$$= kT_s B \quad (3.7)$$

Zatem w warunkach dopasowania mocy, dysponowalna moc szumów o zadanej szerokości pasma B , wydzielona w oporze obciążenia, jest znana jeśli tylko znamy temperaturę oporu źródła. W praktyce „obciążeniem” może być np. opór wejściowy jakiegoś innego podsystemu.

PRZYKŁAD 3.1

Wyznaczyć zastępczy układ szumiący reprezentujący dwa opory R_1 i R_2 połączone szeregowo, o temperaturach odpowiednio T_1 i T_2 .

ROZWIĄZANIE

Odpowiedni schemat podano na rys. 3.3. Ponieważ oba napięcia, e_1 i e_2 reprezentują wartości skuteczne, możemy dodawać ich wartości średnio-kwadratowe:

$$\overline{e_n^2} = \overline{e_1^2} + \overline{e_2^2} = \quad (3.8)$$

$$= 4kBT_1 R_1 + 4kBT_2 R_2 \quad (3.9)$$

otrzymujemy:

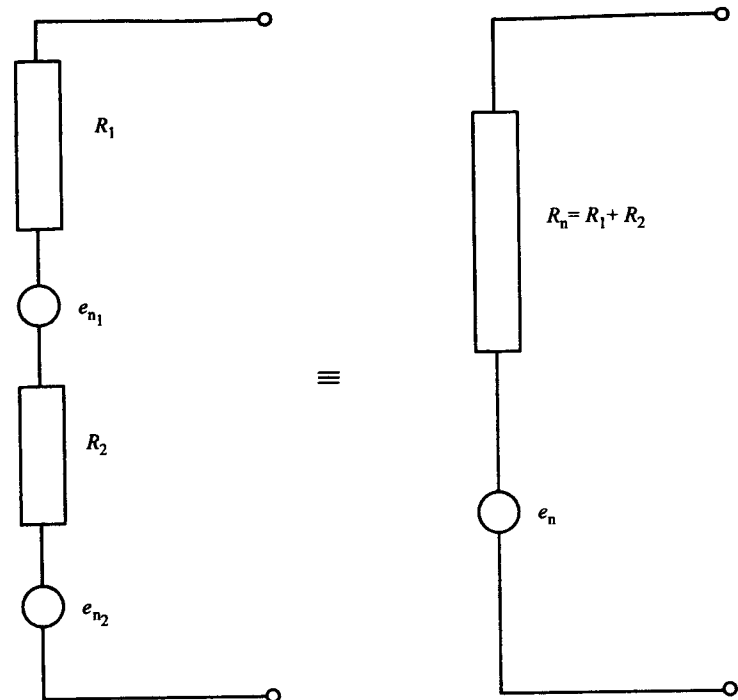
$$e_n = \sqrt{4kB(T_1 R_1 + T_2 R_2)} \quad (3.10)$$

W praktyce oba opory połączone szeregowo znajdują się z reguły w takiej samej temperaturze, którą oznaczmy przez T . Można zatem napisać:

$$e_n = \sqrt{4kTB(R_1 + R_2)} \quad (3.11)$$

Szeregowo połączone dwa opory o tej samej temperaturze zachowują się zatem jak pojedynczy opór im równoważny.

Widmową gęstość mocy (PSD) szumu termicznego, wyrażoną w W/Hz, zilustrowano wykresem z rys. 3.4, gdzie dla przypadku reprezentacji jednostronnej znormalizowana wartość PSD mierzona w watach na hertz wynosi η . Moc przenoszona w pasmie o szerokości B jest więc równa ηB watów. Przez analogię do światła białego, szum

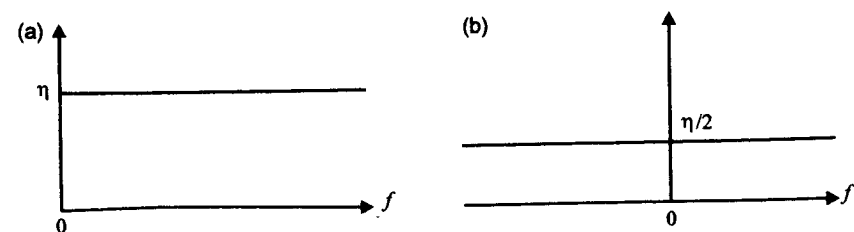


Rys. 3.3

termiczny jest nazywany **szumem białym**. Jest też znany pod nazwą szumu **Johnsona**, od nazwiska tego, kto jako jeden z pierwszych prowadził badania doświadczalne nad szumami.

W przykładzie 3.1 pokazano, że wypadkowa średniokwadratowa wartość napięcia szumów na zaciskach dwu lub większej liczby oporów połączonych szeregowo jest równa sumie ich wartości średniokwadratowych. Ta właściwość addytywności, wraz z widmem w postaci szumu białego, dała początek innej nazwie używanej dla szumu termicznego, a mianowicie **addytywny biały szum gaussowski** (AWGN).

Systemy spotykane w praktyce nie pracują w całym zakresie częstotliwości, w którym zachodzą szumy termiczne. Przypuśćmy, że w warunkach dopasowania mocy, pomiędzy źródłem szumu a obciążeniem umieścimy filtr pasmowoprzepustowy w układzie



Rys. 3.4 Widmo szumu termicznego: a – jednostronne; b – dwustronne

jak na rys. 3.5. Gdy pominąć szum wytwarzany przez sam filtr, widmo szumów na jego wyjściu jest iloczynem wejściowego widma szumów i charakterystyki amplitudowej filtru. Moc szumów na wyjściu jest równa polu pod wyjściową krzywą PSD (które można wyznaczyć całkowaniem). Moc ta jest równoważna

polu pod „idealną” krzywą prostokątną PSD o szerokości pasma B , o takim samym polu, co nasza rzeczywista wyjściowa krzywa PSD. Wymieniona wartość B jest znana pod nazwą **zastępczego pasma szumów**.

3.2.2 Szum śrutowy

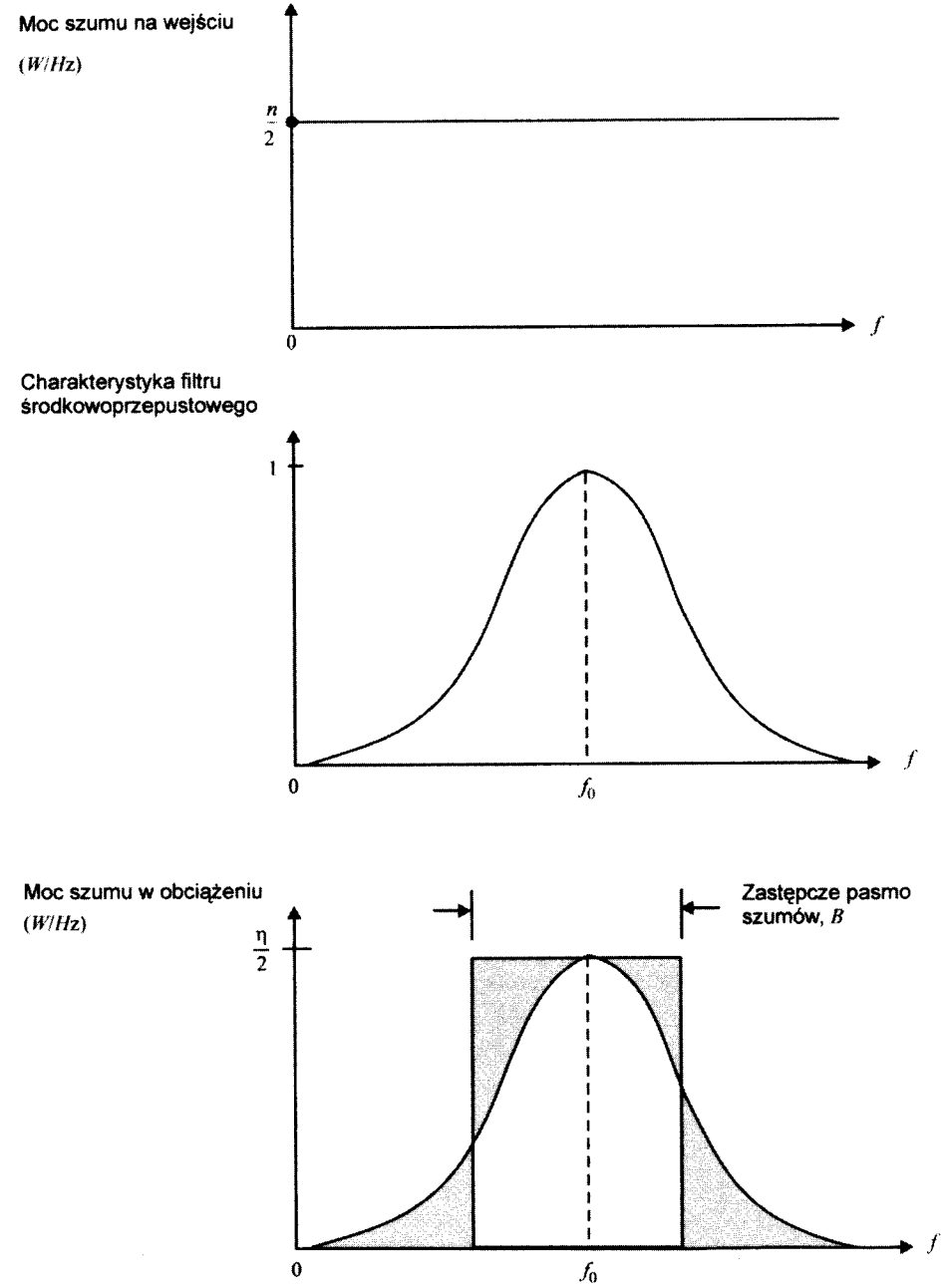
Szum śrutowy jest następną po szumie termicznym, ważną postacią szumu elektrycznego. Gdy prąd stały przepływa przez element aktywny (taki jak półprzewodnikowy lub termoelektronowy), występują przypadkowe zmiany prądu nakładające się na składową stałą. Jest to spowodowane zmiennością czasu docierania nośników ładunku elektrycznego do elektrody wyjściowej, co jest przyczyną powstawania przypadkowej składowej szumowej prądu, jaka dodaje się do składowej stałej.

W odróżnieniu od szumu termicznego, szum śrutowy występuje jedynie w elementach aktywnych. W praktyce można jednak przyjąć, iż wykazuje on podobne właściwości, jak szum termiczny i wnosi moc szumów proporcjonalną do szerokości pasma. Jego nazwa pochodzi od sposobu, w jaki po wzmocnieniu i detekcji odbiera się go przez głośnik, gdyż przypomina dźwięk wydawany przez śrut spadający na metalową płytę.

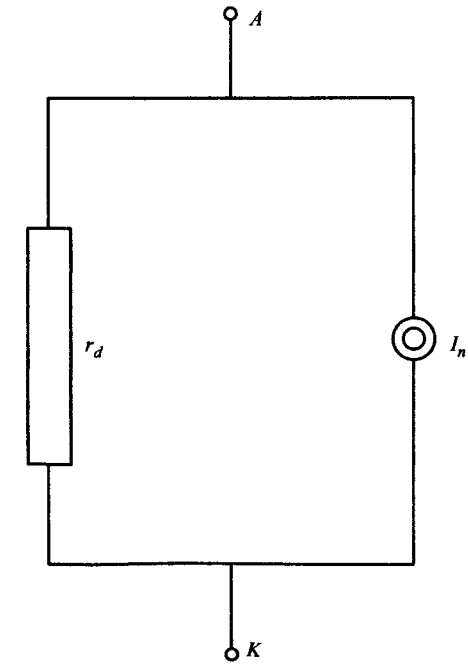
Schemat zastępczy reprezentujący szum śrutowy diody półprzewodnikowej w stanie przewodzenia pokazano na rys. 3.6. Dla częstotliwości w zakresie do gigaherców, wartość skuteczna prądu szumu śrutowego I_n spełnia zależność:

$$I_n = \sqrt{2qI_{dc}B} \tag{3.12}$$

gdzie: q – ładunek elektronu = $1,6 \times 10^{-19}$ C, I_{dc} – stały prąd polaryzacji, B – szerokość pasma.



Rys. 3.5 Równoważna szerokość pasma szumów



Rys. 3.6 Model szumu śrutowego (diody)

Zauważmy, że szum śrutowy jest proporcjonalny do kwadratu prądu średniego płynącego przez diodę. Opór dynamiczny złącza r_d wynosi:

$$r_d = \frac{kT}{qI_{dc}} \quad (3.13)$$

PRZYKŁAD 3.2

Dioda półprzewodnikowa przewodzi prąd o wartości średniej równej 0,1 mA. Wyznaczyć prąd szumu powstający, gdy szerokość pasma wynosi 5 MHz.

ROZWIĄZANIE

$$I_n = \sqrt{2qI_{dc}B} = \quad (3.14)$$

$$= \sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^6} \quad (3.15)$$

$$= 12,7 \text{ nA} \quad (3.16)$$

Napięcie szumów spowodowane szumem śrutowym może zostać wyznaczone na podstawie schematu danego układu elektrycznego. Rozpatrzmy następujący przykład.

PRZYKŁAD 3.3

Dioda znajdująca się w temperaturze 27°C przewodzi prąd o wartości średniej 1 mA jest połączona szeregowo z oporem obciążenia 2 kΩ. Wyznaczyć napięcie szumów na oporze obciążenia przyjmując, iż szerokość pasma wynosi 200 kHz.

ROZWIĄZANIE

Poszukiwane napięcie na oporze obciążenia spowodowane szumem śrutowym można wyznaczyć posługując się schematem zastępczym pokazanym na rys. 3.7, gdzie u_s i u_i są napięciami na oporze obciążenia, spowodowanymi odpowiednio przez szum śrutowy i szum termiczny.

Aby znaleźć u_s , trzeba najpierw wyznaczyć opór dynamiczny złącza r_j równy r_d . Ze wzoru (3.13) otrzymujemy:

$$r_d = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = \quad (3.17)$$

$$= 25,88 \Omega \quad (3.18)$$

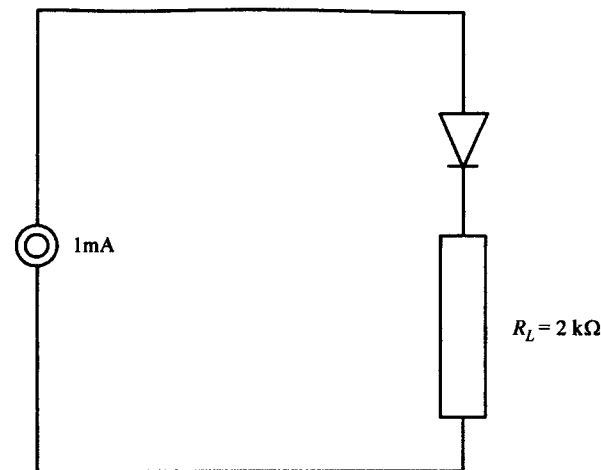
Teraz wyznaczamy u_s :

$$u_s = I_{dc} r_d = \quad (3.19)$$

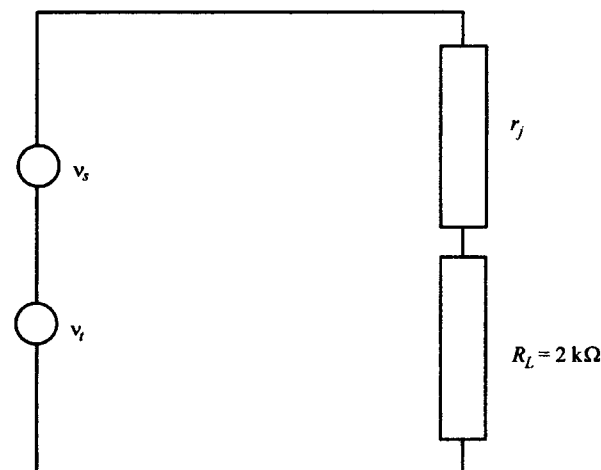
$$= 1 \cdot 10^{-3} \cdot 25,88 = \quad (3.20)$$

$$= 25,88 \text{ mV} \quad (3.21)$$

(a)



(b)



Rys. 3.7 a – Schemat układu; b – zastępczy schemat szumowy

W podobny sposób znajdujemy u_i :

$$u_i = \sqrt{kTBR_L} = \quad (3.22)$$

$$= \sqrt{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3} = \quad (3.23)$$

$$= 1,287 \mu\text{V} \quad (3.24)$$

Teraz należy znaleźć napięcia generowane niezależnie przez u_s i u_i na zaciskach oporu R_L używając dzielnika napięciowego.

Napięcie na oporze R_L pochodzące od u_s , które oznaczmy przez u'_s , wynosi:

$$u'_s = \frac{25,88 \text{ mV} \cdot 2 \text{ k}\Omega}{25,88 \Omega + 2 \text{ k}\Omega} = \quad (3.25)$$

$$= 25,55 \text{ mV} \quad (3.26)$$

Podobnie wyznaczamy:

$$u'_i = \frac{1,287 \mu\text{V} \cdot 2 \text{ k}\Omega}{25,88 \Omega + 2 \text{ k}\Omega} = \quad (3.27)$$

$$= 1,271 \text{ mV} \quad (3.28)$$

Napięcie szumów u_n panujące na zaciskach oporu obciążenia jest wartością średnią z kwadratów obu składowych u'_s i u'_i :

$$u_n = \sqrt{(u'_s)^2 + (u'_i)^2} = \quad (3.29)$$

$$= \sqrt{(25,55 \cdot 10^{-3})^2 + (1,271 \cdot 10^{-6})^2} = \quad (3.30)$$

$$= 2,55 \text{ mV} \quad (3.31)$$

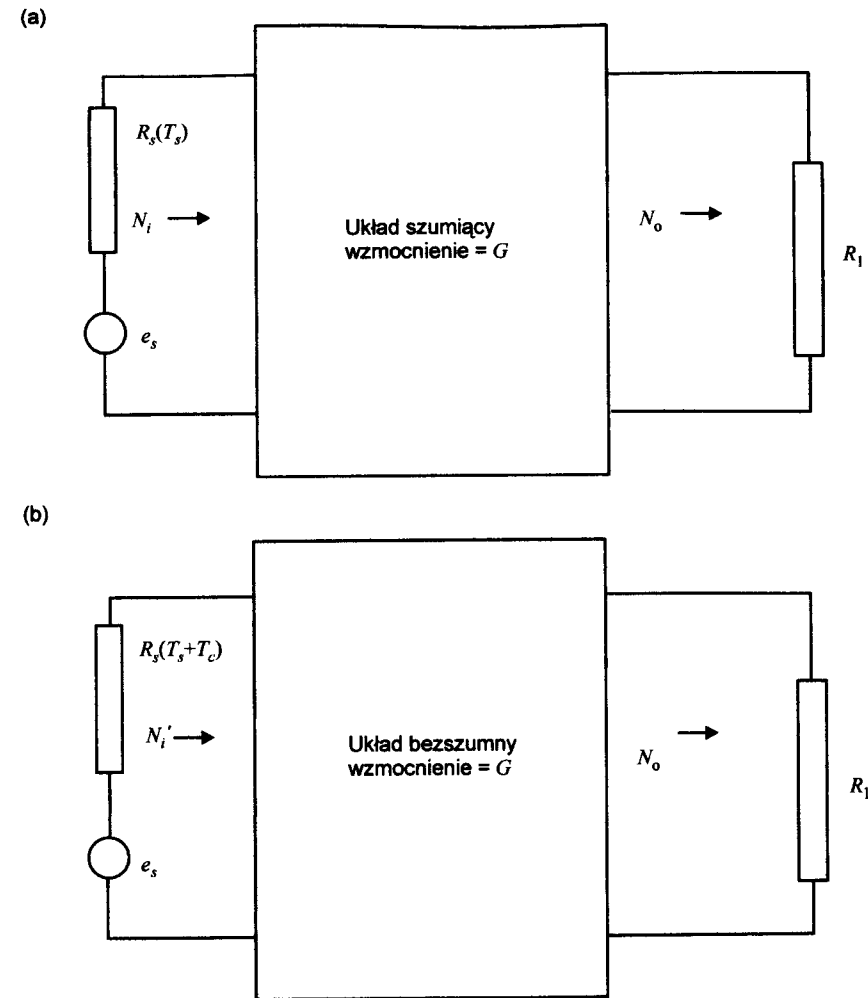
W tym przykładzie napięcie szumu termicznego jest o rząd wielkości większe od szumu śrutowego, a więc całkowite napięcie szumów pochodzi w zasadzie od szumu termicznego. Taka proporcja szumu termicznego do szumu śrutowego jest dość typowa dla sytuacji zachodzących w praktyce.

3.2.3 Szum migotania

Szum migotania ma miejsce w półprzewodnikach z powodu defektów sieci krystalicznej materiału, powodujących fluktuacje jego przewodności. Szum śrutowy, występujący też w przyrządach termoemisyjnych, nie jest łatwy do zmodelowania, gdyż jest inny dla każdego przyrządu. Moc tego szumu jest jednak proporcjonalna do prądu polaryzacji, a odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości. Ze względu na tę ostatnią właściwość szum migotania jest znany też pod nazwą **szumu 1/f** a jego moc maleje wraz z częstotliwością. Oznacza to, iż pod względem widma szum migotania jest skoncentrowany na niskich częstotliwościach, a więc nie ma płaskiego widma jak w przypadku szumu termicznego i z tego powodu nazywany jest też **szumem różowym** (ang. *pink noise*, przyp. tłum.). Przy częstotliwościach powyżej 10 kHz szum migotania może być pomijany w większości zastosowań.

3.3 SKUTECZNA TEMPERATURA SZUMÓW

Dysponowalna moc szumów wydzielana na oporze obciążenia może zostać wyznaczona za pomocą schematu zastępczego reprezentującego dany układ, wynikającego np. z zasady Thevenina. Umożliwia on łatwe wyznaczenie mocy szumów. Gdy jednak źródło jest dołączone do obciążenia za pośrednictwem innego układu, zadanie staje się



Rys. 3.8 Skuteczna temperatura szumów: a – sieć szumiąca; b – sieć bezszumna

trudniejsze, gdyż jak to zwykle bywa w praktyce, układ taki sam wnosi pewne szumy na zaciski oporu obciążenia. Mamy więc do czynienia z układem pokazanym na rys. 3.8.

Dysponowalna moc szumów w obciążeniu pochodząca ze źródła i układu pośredniczącego może zostać wyrażona za pomocą temperatury szumów, związanej z oporem źródła R_s , będącej sumą temperatury oporu źródła T_s oraz temperatury T_c zwanej **skuteczną temperaturą szumów** układu. Skuteczną temperaturą szumów nazywamy temperaturę związaną z oporem R_s , w której moc szumów w obciążeniu jest taka sama, jak wygenerowana przez sam układ. W warunkach dopasowania mocy:

$$N_o = GN_i + N_n \quad (3.32)$$

gdzie N_n – szum w obciążeniu pochodzący z samego układu w warunkach dopasowania.

Rozpatrując układ z rys. 3.8b stwierdzamy, że wielkość N'_i reprezentuje szum na wejściu, który po przejściu przez bezszumny układ wywołuje taką samą wartość szumu N_o w oporze obciążenia:

$$N_o = GN'_i = \quad (3.33)$$

$$= Gk(T_s + T_e)B = \quad (3.34)$$

$$= GN_i + GkT_eB \quad (3.35)$$

$$N_n \equiv GkT_eB \quad (3.36)$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór:

$$T_e = \frac{N_n}{GkB} \quad (3.37)$$

z którego wynika, że skuteczna temperatura szumów układu jest równa składowej mocy szumów N_n podzielonej przez iloczyn jej wzmocnienia, k oraz szerokości pasma. Zauważmy, iż temperatura T_e nie zależy od T_s , gdyż jest ona miarą właściwości szumowych samego układu.

Ćwiczenie sprawdzające 3.1 Pewien układ ma szerokość pasma 6 MHz i wzmocnienie mocy równe 200. Przyjmując, że moc szumów na jego wejściu jest równa 0,5 pW, a moc szumów na wyjściu wynosi 1008 pW, wyznaczyć skuteczną temperaturę szumów układu, jeśli wiadomo, iż układ jest dopasowany do oporu obciążenia 50 Ω .

3.4 SZUMY W SYSTEMACH RADIOELEKTRONICZNYCH

Szum na częstotliwościach radiowych pojawia się w sposób naturalny. Wyładowania elektrostatyczne występujące w atmosferze ziemskiej pod postacią błyskawic wywołują **szum atmosferyczny** lub **statyczny** w zakresie częstotliwości nie przekraczającym około 20 MHz. Gdy pojawiają się wyładowania atmosferyczne, są one odbierane jako impulsy szumowe w odbiorniku. Ten rodzaj szumu jest odbierany na duże odległości i dlatego odbieramy dużą liczbę wyładowań na jednostkę czasu. W pewnych przypadkach wyładowania są na tyle częste, że odbierany szum wydaje się raczej ciągły niż impulsowy. Innym zjawiskiem atmosferycznym jest **szum kwantowy**, który staje się znaczący przy częstotliwościach powyżej 10 GHz. Szum kwantowy pojawia się wskutek zmian atomowych i molekularnych stanów cząstek atmosfery. Ziemia wytwarza ponadto promieniowanie termiczne znane pod nazwą **szumu ziemskiego**. Przy częstotliwościach powyżej 200 MHz ten szum staje się znaczący, zwiększając swe natężenie wraz ze wzrostem częstotliwości.

Prócz zjawisk związanych z Ziemią i jej atmosferą, szum przychodzi także z przestrzeni kosmicznej i jest w tym przypadku znany pod nazwą **szumu kosmicznego**. Słońce jest istotnym źródłem szumu zwanego **szumem słonecznym** generowanym w zakresie od 100 MHz do około 10 GHz. Inne gwiazdy naszej galaktyki też emitują promieniowanie na częstotliwościach radiowych (RF), lecz z uwagi na znaczne odległości gwiazd od ziemi szum ten jest istotny w zakresie do 1 GHz.

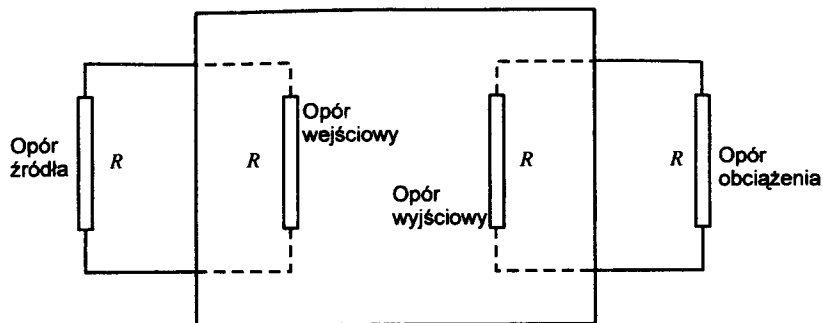
Nagłe zmiany natężenia prądu, jakie mogą pojawiać się regularnie lub jako pojedyncze impulsy, mają bardzo szerokie widmo. (Można się tego spodziewać na podstawie ich transformat Fouriera, znanych nam już z punktu 2.3.) Zmiany te mogą, przy pojawieniu się dostatecznie silnych pól elektromagnetycznych o częstotliwościach radiowych, spowodować zakłócenia w odbiornikach znajdujących się w pobliżu radiowych. Tego rodzaju **sztuczne interferencje** stanowią kolejny przykład szumu i są powodowane szczególnie przez wyłączanie źródeł zasilania urządzeń elektrycznych zawierających indukcyjności. Wszędzie tam, gdzie istnieje groźba interferencji na częstotliwościach radiowych (RF) trzeba stosować specjalne metody tłumienia zakłóceń. Dobrą metodą jest przykładowo dołączanie odpowiedniego kondensatora na zaciski przerywacza w samochodowych układach zapłonowych celem ograniczenia emisji RF powodowanej iskrą powstającą przy rozwieraniu styków. Sztuczna interferencja występuje na częstotliwościach do setek MHz.

Oprócz szumu powstającego w układach elektrycznych nadajników i odbiorników, systemy radioelektroniczne są szczególnie podatne na szumy atmosferyczne, kosmiczne i sztuczne odbierane przez antenę. Szumy wprowadzane za pośrednictwem anteny są czasem nazywane **szumami zewnętrznymi** w odróżnieniu od szumów powstających w sposób naturalny w odbiorniku i zwanych **szumami wewnętrznymi**. Obecność szumów zewnętrznych w systemach radiowych czyni je bardziej narażonymi na zakłócenia, niż systemy wykorzystujące linie transmisyjne łączące nadajnik z odbiornikiem.

Łączny efekt promieniowania atmosfery i przestrzeni kosmicznej może być rozpatrywany jako **szum nieba**, który z pominięciem przypadku gdy antena jest skierowana bezpośrednio na słońce, jest stosunkowo niewielki w porównaniu do szumu wewnętrznego. Szum nieba, choć występuje w szerokim zakresie częstotliwości, może być uważany pod względem widma za równomierny w stosunkowo wąskim pasmie przenoszenia każdego konkretnego systemu. Szum nieba jest minimalny w zakresie częstotliwości mikrofalowych rzędu kilku GHz i dlatego wiele wcześniej zaprojektowanych systemów satelitarnych pracowało na takich właśnie częstotliwościach, np. 6/4 GHz, aby wykorzystywać to niskoszumne „okno”. Powyżej 10 GHz szum nieba jest zdominowany przez szum atmosferyczny, rosnący wraz z częstotliwością.

Szum nieba odbierany przez antenę można reprezentować za pomocą skutecznej temperatury szumów T_{ae} przy znanej szerokości pasma B , związanej z oporem anteny. Taka „temperatura” jest szczególnie użytecznym parametrem przy analitycznej ocenie właściwości szumowych systemów radioelektronicznych. T_{ae} nie jest równa temperaturze samej anteny, lecz jest określana na podstawie pomiaru odbieranego promieniowania i uwzględniana w temperaturze szumów związanej z oporem anteny.

W praktyce, producenci anten mogą podawać T_{ae} na wejściu anteny jako daną katalogową uwzględniającą szum nieba i szum anteny. Skuteczna temperatura szumów może alternatywnie obejmować prócz samej anteny również składową szumu pochodzącą od przedwzmacniacza i linii przesyłowej (feedera) łączącej wyjście anteny z odbiornikiem. W tym przypadku skuteczna temperatura szumów jest określana na wejściu anteny do odbiornika i oznaczmy ją przez T_{ai} . Jest ona bardzo użyteczna, gdyż wejście odbiornika jest dogodnym punktem odniesienia dla reprezentacji składowej szumowej na wyjściu, jako skutecznej temperatury szumów T_e . Wartość temperatury szumów całego systemu



Rys. 3.9 Skuteczna temperatura szumów układu pasywnego

otrzymuje się po prostu przez sumowanie obu temperatur, a mianowicie temperatury anteny T_{ai} oraz odbiornika T_e .

Typowy system telekomunikacji satelitarnej ma skuteczną temperaturę szumów 20 K na wyjściu odbiornika i 20 K na wyjściu anteny, w porównaniu do odpowiednich wartości 290 K i 2000 K uzyskiwanych w przypadku systemu łączności radiowej wysokich częstotliwości (HF). Szumy wprowadzane przez odbiornik satelitarny są więc zdecydowanie mniejsze. Jest to spowodowane głównie niższym stosunkiem sygnał-szum, uzyskiwanym dzięki znacznej długości drogi transmisji oraz związanemu z tym tłumieniu, co jest charakterystyczną cechą systemu telekomunikacji satelitarnej.

Weźmy teraz pod uwagę skuteczną temperaturę szumów układu pasywnego, takiego jak feeder antenowy. Układ pasywny jest reprezentowany w sposób pokazany na rys. 3.9 gdzie przyjęto, iż znajduje się on w stanie obustronnego dopasowania. Dlatego opory: wewnętrzny źródła, wejściowy, wyjściowy, a także opór obciążenia są równe i oznaczone przez R .

Można także założyć, że wszystkie elementy układu mają taką samą temperaturę fizyczną T . Moc szumów dostarczana do obciążenia wynosi:

$$N_o = kTB \quad (3.38)$$

Moc szumów na wyjściu N_o zależy od mocy szumów na wejściu N_i , wzmocnienia układu oraz mocy szumu wnoszonego przez ten układ N_n . Moc wyjściowa szumów jest zatem równa:

$$N_o = GN_i + N_n \quad (3.39)$$

W warunkach dopasowania, dysponowalna moc szumów na wejściu jest równa mocy szumów wydzielanej w oporze wewnętrznym źródła i wynosi:

$$N_i = kTB \quad (3.40)$$

Wielkości N_o oraz N_i ze wzorów (3.38) i (3.40) można podstawić do równania (3.39):

$$kTB = GkTB + N_n \quad (3.41)$$

Stąd otrzymujemy:

$$N_n = (1 - G)kTB \quad (3.42)$$

Na podstawie równania (3.37) można napisać wzór na skuteczną temperaturę szumów układu:

$$T_e = \frac{N_n}{GkB} \quad (3.43)$$

Podstawiając wartość N_n ze wzoru (3.42) do wzoru (3.43) uzyskujemy wyrażenie:

$$T_e = \left(\frac{1 - G}{G} \right) T \quad (3.44)$$

W przypadku feedera, którego wzmocnienie jest mniejsze niż 1, wzór (3.44) można przekształcić do wygodniejszej postaci, posługując się współczynnikiem tłumienia L równym odwrotności wzmocnienia:

$$T_e = (L - 1) T \quad (3.45)$$

Ćwiczenie sprawdzające 3.2 Układ pasywny ma opór obciążenia 75Ω i wzmocnienie równe 0,25. Szerokość pasma szumów wynosi 8 MHz. Układ jest dopasowany przy temperaturze otoczenia równej 27°C . Wyznaczyć:

- skuteczną temperaturę szumów układu;
- moc szumów w obciążeniu;
- moc szumów wnoszoną do obciążenia przez sam układ pasywny.

3.5 STOSUNEK SYGNAŁ-SZUM

W przypadku większości systemów, o ich przydatności dla użytkownika decyduje nie bezwzględny poziom mocy szumów, lecz jej poziom względny w stosunku do mocy sygnału użytecznego. Stosunek mocy sygnału do mocy szumu, zwany krótko stosunkiem sygnał-szum (S/N), określany na wyjściu systemu, jest bardzo istotnym parametrem, którego definicja jest następująca:

$$\frac{S}{N} = \frac{\text{Moc sygnału}}{\text{Moc szumu}} \quad (3.46)$$

Dla wielu spotykanych w praktyce systemów zakres dynamiki sygnałów jest bardzo duży, np. dwa do trzech rzędów wielkości, a więc trzeba uwzględniać zarówno bardzo małe jak i bardzo duże wartości stosunku S/N. Dlatego S/N podaje się zwykle w bardziej dogodnej mierze logarytmicznej, której jednostką jest **decybel** (dB), przy czym:

$$\frac{S}{N} \text{ dB} = 10 \log_{10} \frac{S}{N} \quad (3.47)$$

Aby sygnał użyteczny dał się odtworzyć na wyjściu odbiornika, jego moc powinna dostatecznie przewyższać moc szumów. Aby zilustrować ten fakt może być użyteczna następująca analogia. Dwu ludzi rozmawia ze sobą na pewną odległość w obecności hałasu wytwarzanego przez młot pneumatyczny używany do naprawy dróg. Mowa reprezentuje tu „sygnał”, a odgłos młota „szum”. Gdy obaj znajdują się dostatecznie daleko od źródła hałasu, mogą normalnie rozmawiać, gdyż docierająca do

nich moc hałasu jest stosunkowo mała. Gdy będą się jednak zbliżać do pracującego młota, moc hałasu zacznie wzrastać i aby móc się zrozumieć zostaną zmuszeni do coraz głośniejszej rozmowy. Gdy w końcu znajdą się tuż obok młota, być może w ogóle nie będą już w stanie słyszeć się wzajemnie. Jedynie zatem, gdy sygnał przewyższa szum o odpowiednią wartość, komunikacja może dojść do skutku. Kiedy poziomy sygnału i szumu są podobne, a z pewnością wówczas gdy moc szumu jest większa od mocy sygnału, komunikacja staje się niemożliwa. Jak widać, o zadowalających właściwościach szumowych systemu decyduje względny poziom mocy sygnału w stosunku do mocy szumu, a nie ich bezwzględne wartości. Dopuszczalny margines zależy przy tym od rodzaju systemu i jest zwykle określany za pomocą subiektywnych testów. Typowe wartości dopuszczalnego stosunku sygnał–szum wynoszą około 50–60 dB dla przekazu muzycznego wysokiej jakości, od 16 dB dla mowy o niskiej jakości do 30 dB w systemach telefonii komercyjnej, a około 60 dB w przypadku transmisji TV dobrej jakości.

PRZYKŁAD 3.4

Wzmacniacz ma opór wyjściowy 600 Ω i dostarcza napięcia 250 mV do obciążenia w warunkach dopasowania. Dla temperatury oporu obciążenia równej 27°C i szerokości pasma 10 MHz wyznaczyć:

- dysponowalną moc szumów;
- moc sygnału wydzielaną w obciążeniu;
- stosunek sygnał–szum w oporze obciążenia w dB.

ROZWIĄZANIE

- Dysponowalna moc szumu:

$$N = kT_s B = \quad (3.48)$$

$$= 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 10 \cdot 10^6 = \quad (3.49)$$

$$= 4,14 \cdot 10^{-14} \text{ W} \quad (3.50)$$

- Moc sygnału w obciążeniu:

$$S = \frac{U^2}{R_l} = \quad (3.51)$$

$$= \frac{(250 \text{ mV})^2}{600 \Omega} = \quad (3.52)$$

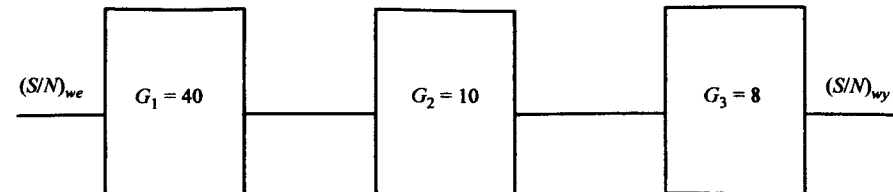
$$= 0,1042 \text{ mW} \quad (3.53)$$

- Na podstawie (3.47) piszemy:

$$\frac{S}{N} = 10 \log \left(\frac{0,1042 \text{ mW}}{4,14 \cdot 10^{-14} \text{ W}} \right) = \quad (3.54)$$

$$= 94 \text{ dB} \quad (3.55)$$

Dalszą zaletą wyrażania S/N w decybelach jest wygodne sumowanie się wartości logarytmicznych współczynników S/N poszczególnych bloków przy ich łączeniu



Rys. 3.10

kaskadowym, zamiast mnożenia jakie trzeba wykonywać, gdy stosujemy miarę liniową. Ilustruje to przykład 3.5.

PRZYKŁAD 3.5

Wyznaczyć S/N na wyjściu systemu pokazanego na rys. 3.10 w mierze liniowej oraz w dB przyjmując moc sygnału wejściowego 2 mW, a moc szumów 5 μW. Założyć, że każdy z układów jest bezszumny.

ROZWIĄZANIE

$$(S/N)_{we} = \frac{2 \text{ mW}}{5 \mu\text{W}} = 400 \quad (3.56)$$

$$(S/N)_{wy} = G_3 \cdot G_2 \cdot G_1 \cdot (S/N)_{we} = \quad (3.57)$$

$$= 8 \cdot 10 \cdot 40 \cdot 400 = \quad (3.58)$$

$$= 1,28 \cdot 10^6 \quad (3.59)$$

Wartość $(S/N)_{wy}$ dB jest równa $(S/N)_{we}$ plus suma wyrażonych w decybelach wzmocnień mocy wszystkich stopni systemu.

$$(S/N)_{we} = 10 \log_{10} \frac{2 \text{ mW}}{5 \mu\text{W}} \quad (3.60)$$

$$= 10 \log_{10} 400 = \quad (3.61)$$

$$= 26,02 \text{ dB} \quad (3.62)$$

Wzmocnienia każdego ze stopni w dB są równe:

$$G_1 = 10 \log_{10} 40 = 16,02 \text{ dB} \quad (3.63)$$

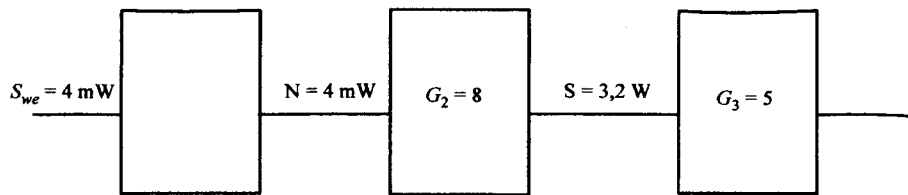
$$G_2 = 10 \log_{10} 10 = 10 \text{ dB} \quad (3.64)$$

$$G_3 = 10 \log_{10} 8 = 9,03 \text{ dB} \quad (3.65)$$

Całkowite wzmocnienie układu wynosi:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = \quad (3.66)$$

$$= 16,02 \text{ dB} + 10 \text{ dB} + 9,03 \text{ dB} = 35,05 \text{ dB} \quad (3.67)$$



Rys. 3.11

Zatem:

$$(S/N)_{wy} = (S/N)_{we} + G = \quad (3.68)$$

$$= 26,02 \text{ dB} + 35,05 \text{ dB} = 61,07 \text{ dB} \quad (3.69)$$

Ćwiczenie sprawdzające 3.3 Dla układu pokazanego na rys. 3.11 wyznaczyć:

- wzmocnienie pierwszego stopnia;
 - moc szumów na wejściu oraz wyjściu drugiego i trzeciego stopnia;
 - moc sygnału na wyjściu pierwszego i trzeciego stopnia.
- Przyjąć, że wszystkie stopnie są „bezszumne”.

3.6 WSPÓŁCZYNNIK SZUMÓW

Na wejściu systemu lub jego podsystemu działa sygnał oraz szum i dlatego wejściu temu można przypisać określoną wartość stosunku sygnał-szum $(S/N)_{we}$. Zarówno sygnał jak i szum przechodzą przez system i podlegają takiemu samemu wzmocnieniu lub tłumieniu przez każdy jego stopień. Można więc oczekiwać, iż wyjściowy stosunek sygnał-szum $(S/N)_{wy}$ będzie równy wejściowemu, a więc nie będzie on ani lepszy ani gorszy od $(S/N)_{we}$. W rzeczywistości jednak szumy wnoszone przez każdy kolejny stopień powodują stopniowe pogarszanie się stosunku sygnał-szum w miarę jak sygnał przechodzi przez system.

Szum wprowadzany przez system lub podsystem można dogodnie opisać za pomocą **współczynnika szumów**, F , który w warunkach dopasowania definiuje się następująco:

$$F = \frac{\text{wejściowy stosunek sygnał-szum}}{\text{wyjściowy stosunek sygnał-szum}} = \quad (3.70)$$

$$= \frac{(S/N)_{we}}{(S/N)_{wy}} \quad (3.71)$$

gdzie $(S/N)_{wy}$ oraz $(S/N)_{we}$ mogą być bezwymiarowe lub wyrażone w dB. Dlatego współczynnik szumów też może być albo bezwymiarowy jako stosunek dwu wielkości bezwymiarowych albo wyrażony w dB.

Gdy wejściowy S/N systemu jest taki sam jak wyjściowy, a więc gdy sam system nie generuje szumów, współczynnik szumów jest równy 1 lub 0 dB. Jeśli natomiast system wprowadza dodatkowe szumy, S/N na wejściu przewyższa S/N na wyjściu co oznacza, iż współczynnik szumów jest większy niż 1. Jego wartość wskazuje więc, czy dany system jest bezszumny, czy też nie.

Skuteczna temperatura szumów T_e jest związana ze współczynnikiem szumów za pomocą następującego wyrażenia:

$$T_e = T_0(F - 1) \quad (3.72)$$

gdzie T_0 wynosi 290 K co jest temperaturą przyjmowaną zwykle jako temperatura odniesienia w danych technicznych urządzeń.

PRZYKŁAD 3.6

Dla pewnego systemu moc szumów na wejściu wynosi 20 pW, moc sygnału na wyjściu 0,4 mW, a moc szumu na wyjściu 4 nW. Przyjmując wzmocnienie systemu równe 40 wyznaczyć:

- szum wnoszony przez system;
- wejściowy stosunek sygnał-szum;
- współczynnik szumów.

ROZWIĄZANIE

- Przy wzmocnieniu mocy równym 40, moc szumu na wyjściu pochodząca od szumu wejściowego wynosi:

$$= G \cdot N_{we} = \quad (3.73)$$

$$= 40 \cdot 20 \text{ pW} = \quad (3.74)$$

$$= 800 \text{ pW} \quad (3.75)$$

Dlatego moc szumu wnoszona przez system jest równa:

$$N_{wy} - N_{we} = \quad (3.76)$$

$$= 4 \text{ nW} - 800 \text{ pW} = \quad (3.77)$$

$$= 3,2 \text{ nW} \quad (3.78)$$

- Znamy moc szumu na wejściu. Aby więc określić wejściowy stosunek sygnał-szum trzeba wyznaczyć moc sygnału na wejściu S_{we} :

$$S_{we} = \frac{S_{wy}}{G} = \quad (3.79)$$

$$= \frac{0,4 \text{ mW}}{40} = \quad (3.80)$$

$$= 10 \text{ } \mu\text{W} \quad (3.81)$$

$$(S/N)_{we} = \frac{S_{we}}{N_{we}} = \quad (3.82)$$

$$= \frac{10 \text{ } \mu\text{W}}{20 \text{ pW}} \quad (3.83)$$

$$= 500\,000 \text{ lub } \approx 57 \text{ dB} \quad (3.84)$$

c) Współczynnik szumów:

$$F = \frac{(S/N)_{we}}{(S/N)_{wy}} \quad (3.85)$$

$$(S/N)_{we} = \frac{0,4 \text{ mW}/40}{4 \text{ pW}} = \quad (3.86)$$

$$= 500\,000 \quad (3.87)$$

$$(S/N)_{wy} = \frac{0,4 \text{ mW}}{4 \text{ nW}} = \quad (3.88)$$

$$= 100\,000 \quad (3.89)$$

Podstawiając wzory (3.87) i (3.89) do (3.85):

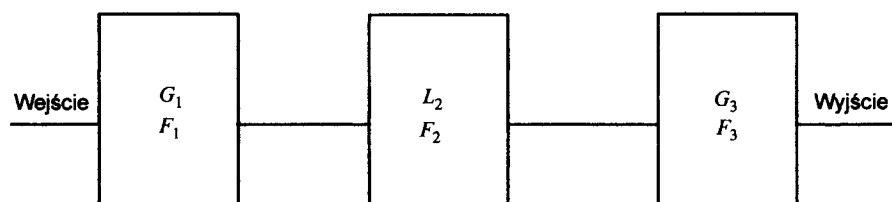
$$F = \frac{500\,000}{100\,000} = \quad (3.90)$$

$$= 5 \text{ lub } \approx 7 \text{ dB} \quad (3.91)$$

Można jeszcze sprawdzić obliczenia z punktu c). Różnica między $(S/N)_{we}$ i $(S/N)_{wy}$ wyrażonymi w dB musi być równa wartości współczynnika szumów wyliczonej w punkcie b), też w dB. Sprawdzenie to pozostawiamy Czytelnikowi.

Ćwiczenie sprawdzające 3.4 Wyjście anteny jest dołączone do przedwzmacniacza o współczynniku szumów równym 8 i wzmacnieniu 17 dB. Przyjmując, że moc szumów na wyjściu anteny przy danej szerokości pasma wynosi 12 pW wyznaczyć:

a) moc szumu w danym pasmie na wyjściu wzmacniacza;



Rys. 3.12 Współczynnik szumów układu kaskadowego

b) moc szumu wniesionego przez wzmacniacz.

Rozpatrzmy teraz kaskadowe połączenie pewnej liczby bloków, każdy o wzmacnieniu G lub tłumieniu L (przy czym $L = 1/G$) oraz współczynnikach szumów jak na rys. 3.12. Aby wyznaczyć wypadkowy współczynnik szumów F całego układu określony wzorem (3.70), należy znać odpowiednie wartości stosunku sygnał-szum. Współczynnik F można też określić z równania znanego pod nazwą wzoru Frii, podanego dla ogólnego przypadku kaskadowego połączenia n bloków (stopni):

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{F_n - 1}{G_1 G_2 \dots G_n} \quad (3.92)$$

gdzie:

$$G_2 = 1/L_2 \quad (3.93)$$

G_1 oraz F_1 reprezentują odpowiednio wzmacnienie i współczynnik szumów pierwszego stopnia układu, G_2 oraz F_2 drugiego stopnia itd.

Interesujący i ważny wniosek wynikający ze wzoru (3.93) sprowadza się do tego, iż współczynnik szumów F zależy głównie od pierwszego stopnia układu. Gdy bowiem pierwszy stopień ma określone wzmacnienie, jego współczynnik szumów stanowiący składnik odpowiedniego współczynnika całego układu zostaje zredukowany w stosunku do wartości wzmacnienia G_1 . Kolejne stopnie, o których zakładamy że są wzmacniaczami a nie tłumikami, wpływają znacznie mniej na całkowity współczynnik szumów układu, gdyż ich mianowniki stanowią iloczyny odpowiednich wzmacnień. Ilozyny te są zwykle na tyle duże, iż czynią składowe współczynniki szumów pomijalnymi względem F_1 .

Inżynier musi często podjąć decyzję, gdzie umieścić wzmacniacz w radioodbiorniku. Odbierane sygnały radiowe są zwykle bardzo słabe i wzmacniacz jest konieczny, aby wzmacnić odpowiednio sygnał docierający od anteny poprzez feeder. Może się z pozoru wydawać nieistotne, czy ten wzmacniacz znajduje się pomiędzy anteną a feederem, czy też na wyjściu feedera. Nie ma to oczywiście wpływu na moc uzyskiwanego sygnału. Rozważmy następujący przykład.

PRZYKŁAD 3.7

Antena jest dołączona do odbiornika poprzez kabel feedera o stratach 3 dB i współczynniku szumów 0,25 dB. Na wejście odbiornika chcemy dołączyć przedwzmacniacz o wzmacnieniu 18 dB i współczynniku szumów 1 dB. Przyjmując warunek dopasowania, porównać całkowite współczynniki szumów przy dwu pozycjach przedwzmacniacza:

- pomiędzy anteną a feederem;
- pomiędzy feederem a odbiornikiem.

ROZWIĄZANIE

Zanim określimy współczynnik szumów F kaskadowego połączenia anteny i feedera za pomocą wzoru Frii, należy wyrazić wzmacnienie i współczynniki szumów w postaci bezwymiarowej na podstawie ich wartości w dB.

0,25 dB jest odpowiednikiem $\text{alog}_{10} 0,025 = 1,059$

1 dB jest odpowiednikiem $\text{alog}_{10} 0,1 = 1,259$

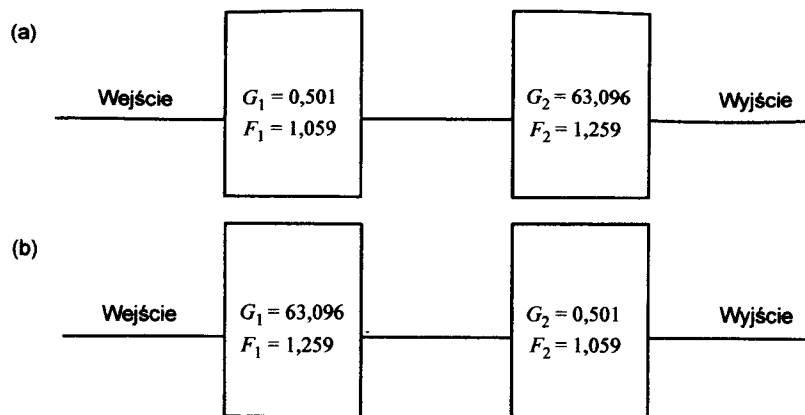
3 dB jest odpowiednikiem $\text{alog}_{10} 0,3 = 1,995$

18 dB jest odpowiednikiem $\text{alog}_{10} 1,8 = 63,096$

a) Układ blokowy, w którym feeder poprzedza wzmacniacz pokazano na rys. 3.13a.

Współczynnik szumów tego kaskadowego połączenia wynosi (3.92):

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_2} \quad (3.94)$$



Rys. 3.13 a – Feeder poprzedza wzmacniacz; b – Wzmacniacz poprzedza feeder

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy:

$$F = 1,059 + \frac{1,259 - 1}{63,096} = \quad (3.95)$$

$$= 0,266 \text{ dB} \quad (3.96)$$

b) Układ blokowy, w którym wzmacniacz poprzedza feeder pokazano na rys. 3.13b. Współczynnik szumów tego kaskadowego połączenia o odwróconej kolejności, po podstawieniu odpowiednich wartości wzmocnienia i współczynników szumów, wynosi:

$$F = 1,259 + \frac{1,059 - 1}{0,501} = \quad (3.97)$$

$$= 1,389 \text{ dB} \quad (3.98)$$

Gdy więc feeder poprzedza wzmacniacz, współczynnik szumów wynosi tylko 0,266 dB, a nie 1,389 dB, co oznacza polepszenie wyjściowego stosunku sygnał–szum o 1,123 dB.

3.7 PODSUMOWANIE

Szum elektryczny można zdefiniować jako niepożądaną energię, jaka towarzyszy sygnałom w systemach telekomunikacyjnych. Szum ten zawsze występuje obok sygnału w każdym punkcie systemu. Szumy w systemach telekomunikacyjnych można podzielić na wytwarzane sztucznie oraz pojawiające się w sposób naturalny. Wiele elementów elektrycznych i elektronicznych wprowadza do systemu szumy w naturalny sposób.

Głównym źródłem zakłóceń jest szum termiczny występujący w opornikach ze względu na pobudzenie termiczne. Jest on proporcjonalny do temperatury i szerokości pasma. Szum termiczny, tak jak szereg innych rodzajów szumu występującego w elementach elektronicznych, może być modelowany, co pozwala na wyliczenie mocy szumów w układach elektrycznych. Inny model reprezentujący szum wprowadzany przez

układ elektryczny prowadzi do określenia skutecznej temperatury szumów. Moc szumów wydzielana w obciążeniu, a pochodząca jedynie od samego układu, może być liczona na podstawie jego oporu wewnętrznego i skutecznej temperatury szumów układu oraz jego wzmocnienia. W systemach radiowych pojawia się szum naturalnego pochodzenia, znany jako szum statyczny, kwantowy, ziemski, a także kosmiczny i słoneczny. Innym rodzajem szumu w systemach radiowych są zakłócenia sztuczne wytwarzane przez niektóre urządzenia elektryczne. Łączny efekt naturalnych zjawisk powodujących szum, występujący na wejściu anteny odbiorczej, reprezentowany jest przez skuteczną temperaturę szumów anteny, której typowe wartości zostały podane. Pojęcie skutecznej temperatury szumów wyraża szumy wytwarzane w odbiorniku w zależności od temperatury szumów na jego wejściu. Wejście to stanowi wygodny punkt systemu jeśli chodzi o podawanie temperatury szumów, gdyż różne odbiorniki mogą być w tym wypadku porównywane bezpośrednio ze sobą.

Wprowadzono też pojęcie stosunku sygnał–szum i pokazano, iż system może pracować poprawnie nawet w obecności szumu, jeśli tylko moc sygnału przewyższa moc szumu o dostateczny margines. Współczynnik szumów stanowi dogodny parametr, alternatywny względem stosunku sygnał–szum. Pozwala on bowiem ocenić właściwości szumowe całego systemu i obliczyć współczynnik sygnał–szum dla układu będącego kaskadowym połączeniem pewnej liczby bloków.

Zadania

3.1. Wyznaczyć zastępczy schemat szumowy reprezentujący dwa opory R_1 i R_2 połączone szeregowo, o temperaturach odpowiednio T_1 i T_2 . Wskazówka: Zastosować twierdzenie Thevenina dla wyznaczenia dwu niezależnych źródeł o siłach elektromotorycznych e_1 i e_2 . Ponieważ są to wartości skuteczne, wypadkowa siła elektromotoryczna zastępczego schematu szumowego e_n wyraża się wzorem:

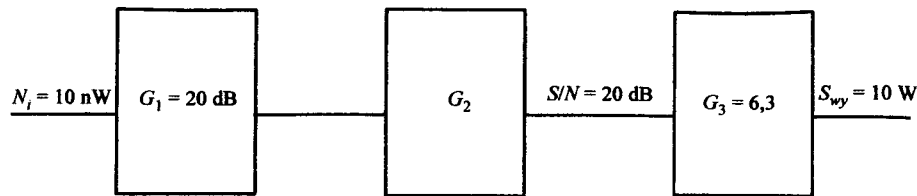
$$e_n = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} \quad (3.99)$$

3.2. Dioda jest połączona szeregowo z oporem o wartości 4,7 kΩ. Przyjmując wartość średnią prądu 2 mA, wyznaczyć napięcie szumów na oporze powstające w wyniku szumów śrutowych i cieplnych. Przyjąć szerokość pasma 100 kHz oraz temperaturę otoczenia 27°C.

3.3. Wszystkie gwiazdy naszej galaktyki emitują fale radiowe (RF). Rozpatrując szum kosmiczny wyjaśnić, dlaczego istotny jest jedynie wpływ szumu słonecznego. (Uwaga: tłumienie fali elektromagnetycznej jest proporcjonalne do kwadratu odległości.)

3.4. System zawiera stopień o wzmocnieniu 100 i skutecznej temperaturze szumów 600°C, połączony kaskadowo z drugim stopniem o wzmocnieniu 500 i skutecznej temperaturze szumów 3000°C. Sygnałowi wejściowemu towarzyszy moc szumu 12 pW przy szerokości pasma 2 MHz. Przyjmując, iż cały system jest dopasowany, wyznaczyć:

- skuteczną temperaturę szumów obu stopni, odniesioną do wejścia systemu;
- szum wnoszony przez każdy ze stopni;
- całkowitą moc szumów na wyjściu systemu.



Rys. 3.14

- 3.5. Dla układu z rys. 3.14 wyznaczyć moc sygnału i moc szumu w każdym punkcie systemu oraz wzmacnienie drugiego stopnia. Przyjąć, iż żaden ze stopni nie wnosi szumu i że system jest wszędzie dopasowany.
- 3.6. Wyjście anteny jest dołączone do przedwzmacniacza o wzmacnieniu 15 dB. Przyjmując, że przy znanej szerokości pasma moc szumów na wejściu wzmacniacza wynosi 12 pW, a moc szumów na wyjściu wynosi 3 nW wyznaczyć:
- moc szumów na wyjściu wzmacniacza spowodowaną szumem wejściowym;
 - moc szumów wnoszoną przez wzmacniacz;
 - współczynnik szumów wzmacniacza;
 - skuteczną temperaturę szumów na wejściu wzmacniacza.
- 3.7. System składa się z trzech wzmacniaczy połączonych kaskadowo, każdy o innym wzmacnieniu. Wyjaśnić w sposób opisowy, dlaczego stosunek sygnał-szum na wyjściu systemu jest maksymalny, gdy stopnie są tak uszeregowane, iż każdy następny stopień ma mniejsze wzmacnienie od stopnia go poprzedzającego.
- 3.8. Odbiornik satelitarny o oporze wyjściowym 50Ω ma pasmo 10 MHz. Odbiornik ten składa się z anteny o skutecznej temperaturze szumów 20 K dołączonej do przedwzmacniacza o wzmacnieniu 30 dB i skutecznej temperaturze szumów 4 K. Feeder o tłumieniu 1,5 dB jest dołączony do drugiego stopnia o wzmacnieniu 65 dB i współczynniku szumów 15 dB. Dla temperatury otoczenia 17°C wyznaczyć:
- współczynnik szumów przedwzmacniacza;
 - skuteczną temperaturę szumów feedera;
 - współczynnik szumów systemu bez anteny;
 - skuteczną temperaturę szumów całego systemu na wejściu przedwzmacniacza.

Literatura

Connor, F.R., *Noise*, wyd. 2, Edward Arnold, 1982. ISBN 0-7131-3459-3.
 Schwartz, M., *Information Transmission, Modulation and Noise*, wyd. 4, McGraw-Hill, 1990. ISBN 0-07-100931-0.

Wprowadzono podział na modulację amplitudy i modulację kąta. Modulacja kąta dzieli się z kolei na modulację fazy i modulację częstotliwości. Modulacja fazy jest znacznie mniej rozpowszechniona i w tym rozdziale skoncentrowano się głównie na modulacji amplitudy i modulacji częstotliwości.

Przedstawiono szczegółową analizę pełnej modulacji amplitudy wraz z jej opisem w dziedzinie czasu i częstotliwości. Zdefiniowano głębokość modulacji i pokazano jej wpływ na właściwości szumowe i podział mocy między falę nośną i wstęgi boczne. Opisano nieliniowe oraz liniowe metody uzyskiwania modulacji amplitudy, a także detektor diodowy oraz demodulację koherentną. Wprowadzono też modulację amplitudy bez fali nośnej oraz modulację jednowstęgową. Podano matematyczną reprezentację modulacji częstotliwości i zdefiniowano pojęcie wskaźnika modulacji. Przedstawiono widmo sygnału zmodulowanego częstotliwościowo i pokazano, że jest ono nieskończone. Podano zastosowanie funkcji Bessela do wyznaczania praktycznej skończonej szerokości pasma, opartej na wskaźniku modulacji. Do aproksymacji tej szerokości pasma stosowany jest wzór Carsona.

Wprowadzono też wąskopasmową modulację częstotliwości, którą porównano następnie z modulacją amplitudy i szerokopasmową modulacją częstotliwości. Transmisję wielokanałową z wykorzystaniem pojedynczego łącza pokazano na przykładzie zwielokrotniania z podziałem częstotliwościowym. Wyjaśniono powstawanie efektu progowego.

Zajęto się też demodulacją sygnałów w obecności szumu, podając oszacowanie stosunku sygnał-szum na wyjściu odbiornika. Przedstawiono szczegółowe porównanie różnych technik modulacji, głównie pod względem ich właściwości szumowych i wymagań odnośnie szerokości pasma. Porównanie to dotyczy także systemów pracujących w pasmie podstawowym.

4.1 MODULACJA AMPLITUDY

Modulacja może być rozumiana jako proces nakładania informacji będącej w postaci **sygnału informacyjnego** $m(t)$ na inny przebieg o wyższej częstotliwości, nazywany **falą nośną**. Jedną z podstawowych przyczyn stosowania modulacji jest przetwarzanie sygnałów o niskich częstotliwościach na sygnały o dostatecznie wysokich częstotliwościach, aby można je było przesyłać na częstotliwościach radiowych. Jest to niezbędne

tak w radiokomunikacji, jak też aby umożliwić wielokanałową pracę systemów kablowych, zarówno na kablach metalowych jak i światłowodowych, gdy każdy kanał ma przydzielone pasmo częstotliwości celem uniknięcia interferencji wzajemnej.

Sinusoidalny sygnał nośny można zapisać w ogólnej postaci:

$$g(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (4.1)$$

gdzie: ω – pulsacja, czyli częstotliwość kątowna, ϕ – dowolna faza początkowa.

Amplituda A może być w pewien sposób modulowana, przez co uzyskujemy **modulację amplitudy**, w skrócie AM. Wzór (4.1) można też zapisać inaczej:

$$g(t) = A \sin \theta(t) \quad (4.2)$$

przy czym $\theta(t)$ jest fazą chwilową i jak wynika z porównania ze wzorem (4.1) zależy liniowo od czasu:

$$\theta(t) = \omega t + \phi \quad (4.3)$$

Kąt $\theta(t)$ może być także modulowany, co stanowi alternatywę w stosunku do modulacji amplitudy fali nośnej. **Modulacja kąta** może zostać zrealizowana na dwa sposoby, a mianowicie jako **modulacja fazy (PM)**, gdy modulujemy kąt ϕ w taki sposób, że faza chwilowa jest proporcjonalna do amplitudy sygnału informacyjnego zwanego inaczej **sygnałem modulującym**, oraz **modulacja częstotliwości (FM)**, gdy częstotliwość jest zmieniana proporcjonalnie do amplitudy chwilowej sygnału modulującego.

Sygnał zmodulowany amplitudowo może być przedstawiony matematycznie jako:

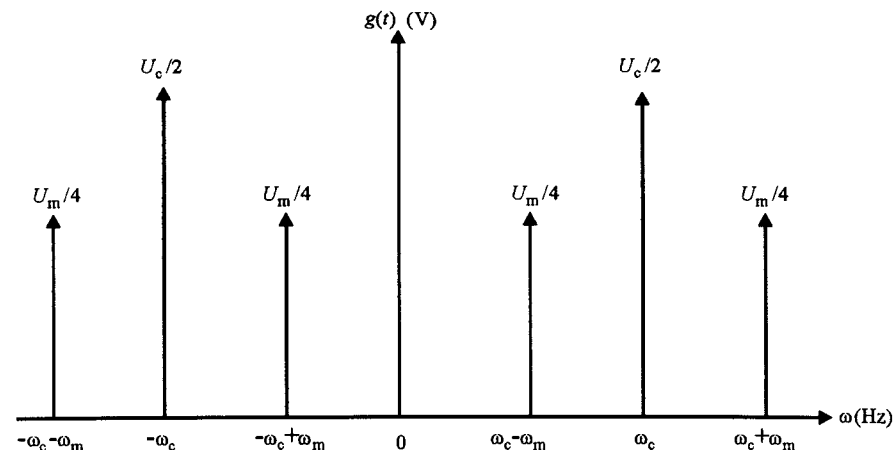
$$g(t) = \left(1 + \frac{U_m}{U_c} \sin \omega_m t\right) U_c \sin \omega_c t \quad (4.4)$$

gdzie $U_c \sin \omega_c t$ reprezentuje falę nośną, na którą nakłada się sygnał modulujący $U_m \sin \omega_m t$. Stosując tożsamości trygonometryczne dla pozbycia się iloczynu dwu składników sinusoidalnych przekształcamy $g(t)$ do postaci:

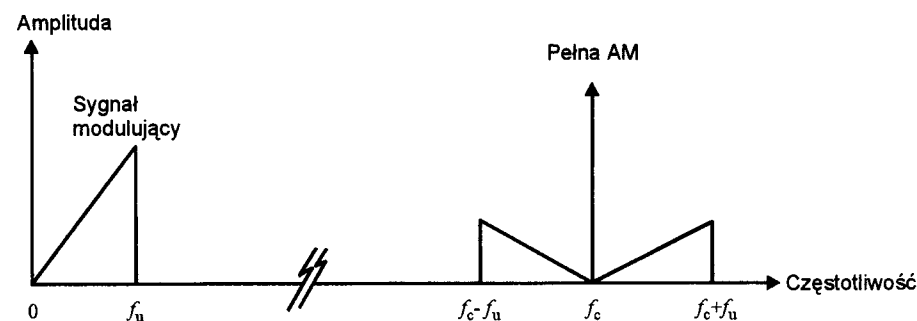
$$g(t) = U_c \sin \omega_c t + \frac{U_m}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t - \frac{U_m}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t \quad (4.5)$$

Równanie (4.5) zawiera składową sinusoidalną $U_c \sin \omega_c t$, która jest po prostu niezmodulowanym przebiegiem nośnym. Dodatkowo występują składniki znane odpowiednio jako składowa sumacyjna i różnicowa, $(U_m/2) \cos(\omega_c + \omega_m)t$ oraz $(U_m/2) \cos(\omega_c - \omega_m)t$, nazywane też **górną** i **dolną częstotliwością boczną**. W widmie dwustronnym występują one jako dwie sinusoidy o pulsacjach $\pm(\omega_c \pm \omega_m)$. Opisany sygnał jest znany jako **pełny sygnał AM**, a jego widmo pokazano na rys. 4.1, gdzie można zauważyć, że sygnał ten jest odpowiednikiem splotu sygnałów sinusoidalnych o częstotliwościach ω_c i ω_m .

W praktyce zmodulowany sygnał jest przebiegiem bardziej złożonym i zawiera cały zbiór częstotliwości nazywany **pasmem** reprezentującym oryginalną informację. Przyjęto taki sygnał AM zmodulowany sygnałem informacyjnym z **pasma podstawowego** przedstawiać graficznie w postaci jak na rys. 4.2, gdzie f_u oznacza najwyższą częstotliwość sygnału informacyjnego, zwaną także górną częstotliwością graniczną.



Rys. 4.1 Widmo pełnego sygnału AM



Rys. 4.2 Widmo pełnego sygnału AM (w praktyce)

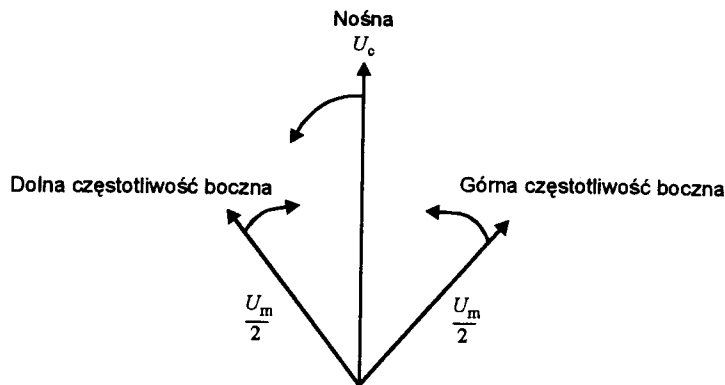
Łatwo zauważyć, iż sygnał AM zajmuje pasmo równe podwójnej najwyższej częstotliwości sygnału informacyjnego. Sygnał modulujący powinien mieć częstotliwość znacznie mniejszą od częstotliwości fali nośnej, gdyż inaczej zachodzi zjawisko aliasingu omówione już w rozdziale 2. Z rysunku 4.1 wynika, że spełnienie warunku $\omega_c \geq 2\omega_m$ zapobiega nakładaniu się częstotliwości dodatnich i ujemnych sygnału AM.

Ćwiczenie sprawdzające 4.1 Telefoniczny sygnał mowy zajmuje pasmo od 300 do 3400 Hz i moduluje falę nośną o częstotliwości 120 KHz. Naskicować widmo dwustronne sygnału zmodulowanego.

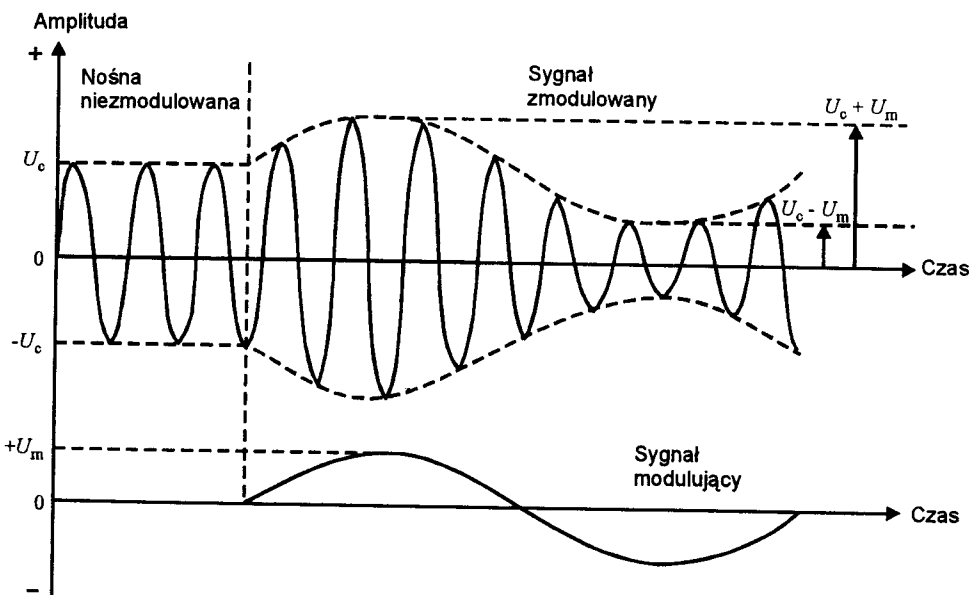
Zanim zajmiemy się sygnałem AM w dziedzinie czasu, rozpatrzmy wykres wskazowy reprezentujący sygnał $g(t)$ pokazany na rys. 4.3. Jak z tego wykresu wynika, omawiany przebieg czasowy jest sinusoidą o takiej samej pulsacji jak fala nośna i amplitudzie zmieniającej się w zakresie $U_c \pm U_m$, skąd nazwa modulacji amplitudy. Przebieg $g(t)$ przedstawiono na rys. 4.4.

Stosunek U_m/U_c jest nazywany **głębokością modulacji m** :

$$m = \frac{U_m}{U_c} \quad (4.6)$$



Rys. 4.3 Wykres wskazowy pełnego sygnału AM



Rys. 4.4 Pełny sygnał AM (w dziedzinie czasu)

Równość (4.6) podstawiamy do równania (4.4) i otrzymujemy najczęściej używany zapis przebiegu AM:

$$g(t) = (1 + m \sin \omega_m t) U_c \sin \omega_c t \quad (4.7)$$

PRZYKŁAD 4.1

Fala AM ma postać:

$$e = 5(1 + 0,5 \cos 3140t) \sin 2\pi 10^5 t$$

Wyznaczyć:

a) głębokość modulacji;

- b) częstotliwość modulującą;
- c) częstotliwość nośną;
- d) szczytową wartość chwilową fali zmodulowanej.

ROZWIĄZANIE

Z podanego wyrażenia mamy: $U_c = 5 \text{ V}$ i fala nośna ma postać $5 \sin 2\pi 10^5 t \text{ V}$. Dalej:

$$\frac{U_m}{U_c} \sin \omega_m t = 0,5 \cos 3140t \text{ V}$$

- a) przez porównanie $m = 0,5$ oraz
- b) $\omega_m = 3140$ zatem: $f_m = 3140/2\pi = 500 \text{ Hz}$
- c) $\omega_c = 2\pi 10^5$, $f_c = 2\pi 10^5/2\pi = 100 \text{ kHz}$.
- d) $\frac{U_m}{U_c} = 0,5$, $U_m = 0,5 U_c = 0,5 \cdot 5 \text{ V} = 2,5 \text{ V}$

szczytowa amplituda chwilowa fali zmodulowanej $= U_c + U_m = 5 + 2,5 \text{ V} = 7,5 \text{ V}$.

Im większa jest amplituda sygnału modulującego, tym większy jest zakres zmian wartości międzyszczytowej obwiedni fali AM, czyli głębokość modulacji. W praktyce należy dążyć do uzyskania sensownej głębokości modulacji. Gdy m jest bardzo małe, np. mniej niż 0,1; małe zmiany amplitudy obwiedni spowodowane szumem mogą okazać się znaczące. Odbiór sygnału AM sprowadza się do odzyskiwania obwiedni i w wyniku odtwarzany jest użyteczny sygnał informacyjny wraz z szumem przez co stosunek S/N ulega zmniejszeniu. Gdy natomiast m jest dostatecznie duże, minimum obwiedni może dotykać osi poziomej. Przy dalszym zwiększaniu sygnału modulującego fala zmodulowana ulega zniekształceniu i po zdemodulowaniu nie uzyskamy właściwego sygnału informacyjnego. W dodatku, przy dużych m , kiedy minimum amplitudy sygnału zmodulowanego jest niewielkie, wpływ szumów znów zaczyna być istotny.

W praktycznych modulatorach AM zakres amplitud sygnału modulującego jest więc z uwagi na szумы i zniekształcenia, przy zadanej amplitudzie fali nośnej, ograniczony zarówno od dołu jak i od góry. Spełnienie tego warunku jest trudne, jeśli sygnał informacyjny ma dużą dynamikę. Typowa głębokość modulacji powinna mieścić się w granicach od 0,2 do 0,8 przez 99% czasu, co stanowi praktyczny warunek prawidłowego działania modulatora.

Odpowiednia modyfikacja wzoru (4.6) pozwala na uzyskanie wyrażenia (4.8) którego postać umożliwia praktyczne określanie głębokości modulacji AM za pomocą oscyloskopu.

$$m = \frac{(\text{maksimum} - \text{minimum}) \text{ amplitudy obwiedni}}{(\text{maksimum} + \text{minimum}) \text{ amplitudy obwiedni}} = \quad (4.8)$$

$$= \frac{(U_c + U_m) - (U_c - U_m)}{(U_c + U_m) + (U_c - U_m)} \quad (4.9)$$

Ćwiczenie sprawdzające 4.2 Obwiednia fali AM ma maksimum równe 14 V i minimum równe 6 V. Wyznaczyć:

a) głębokość modulacji;

- b) amplitudę fali nośnej;
c) amplitudę sygnału modulującego.

Moc wydzielana przez sygnał zmodulowany w oporze obciążenia R wynosi:

$$\text{Moc w obciążeniu} = \frac{U^2}{R} \quad (4.10)$$

$$\text{Moc fali nośnej, } P_c = \frac{U_c^2}{R} \quad (4.11)$$

Na podstawie wzoru (4.6) możemy napisać:

$$U_m = mU_c \quad (4.12)$$

Moc wydzielana przez każdy z prążków bocznych w oporze obciążenia wynosi:

$$\frac{(mU_c/2)^2}{R} = \quad (4.13)$$

$$= \frac{m^2 U_c^2}{4R} \quad (4.14)$$

$$= \frac{m^2}{4} P_c \quad (4.15)$$

Całkowita moc wydzielana przez sygnał zmodulowany w oporze obciążenia R jest równa:

$$P = \frac{U_c^2}{R} \left(1 + 2 \frac{m^2}{4} \right) = \quad (4.16)$$

$$= \frac{U_c^2}{R} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) \quad (4.17)$$

Stosunek mocy prążków bocznych do całkowitej mocy:

$$\frac{2m^2 U_c^2 / 4R}{\frac{U_c^2}{R} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)} = \quad (4.18)$$

$$= \frac{m^2}{2 + m^2} \quad (4.19)$$

Można też wyliczyć stosunek fali nośnej do mocy całkowitej:

$$\frac{P_c}{P} = \frac{2}{2 + m^2} \quad (4.20)$$

Jak wynika ze wzoru (4.20), znaczna część całkowitej mocy wydzielanej w oporze R stanowi moc samej fali nośnej i sięga dwu trzecich całej mocy. Jest to nieekonomiczne szczególnie w nadajnikach dużej mocy, jak np. w telewizji, co stanowi istotną wadę pełnej modulacji AM.

Ćwiczenie sprawdzające 4.3 Wyznaczyć procentowo moc prążków bocznych i fali nośnej wydzielaną w oporze obciążenia dla wartości m w granicach od 0 do 1, co 0,1. Zilustrować wyniki w formie wykresu.

Modulacja amplitudy dokonywana jest za pomocą elektronicznego układu mnożącego lub mieszacza. Układy te, choć różnią się od siebie pod względem zasady działania, dają w wyniku mnożenie U_c przez U_m z uwzględnieniem warunku koniecznego zapisanego przez nas uprzednio wzorem (4.4).

4.1.1 Modulacja nieliniowa

Modulacja nieliniowa polega na sumowaniu sygnału nośnego z sygnałem modulującym. Fala uzyskana w ten sposób jest następnie podawana na element nieliniowy, jak np. wzmacniacz, przy czym amplituda tej fali musi być na tyle duża, aby zapewnić nieliniowy zakres jego pracy. Proces ten jest znany pod nazwą **mieszania**. Charakterystyka układu nieliniowego ma ogólną postać:

$$U_o = k + aU_i + bU_i^2 + cU_i^3 + \dots \quad (4.21)$$

gdzie: U_o , U_i – oznaczają odpowiednio napięcie wyjściowe i wejściowe.

Niech U_i będzie sumą sygnału nośnego i modulującego:

$$U_i = U_m \sin \omega_m t + U_c \sin \omega_c t \quad (4.22)$$

Podstawiamy wzór (4.22) do (4.21) otrzymując:

$$U_o = k + a(U_m \sin \omega_m t + U_c \sin \omega_c t) + b(U_m \sin \omega_m t + U_c \sin \omega_c t)^2 + \dots \quad (4.23)$$

Rozwinięcie wyrażenia (4.23) zawiera składniki:

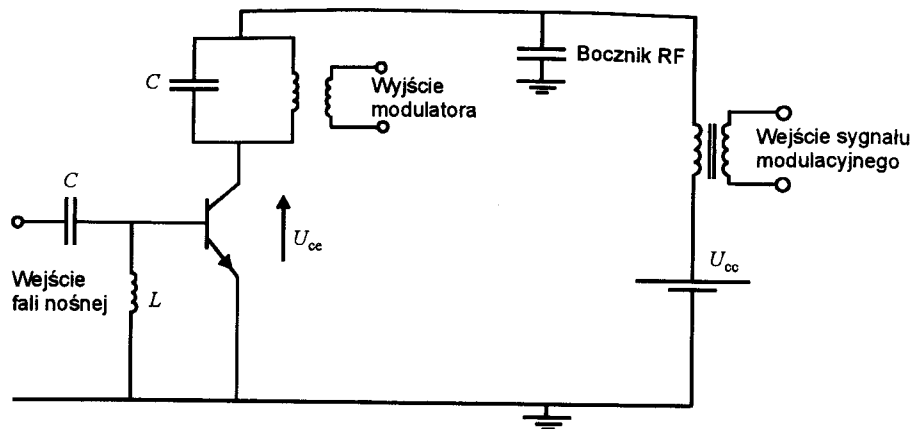
$$aU_c \sin \omega_c t + bU_m U_c [\cos(\omega_c - \omega_m)t - \cos(\omega_c + \omega_m)t] \quad (4.24)$$

które rozpoznajemy jako postać zapisu matematycznego fali AM. Wszystkie inne składniki rozwinięcia (4.23) (częstotliwość z pasma podstawowego i wielokrotności częstotliwości nośnej) można usunąć za pomocą odpowiedniej filtracji. Ze względu na istnienie czynnika kwadratowego w charakterystyce elementu nieliniowego stosowanego do generacji fali AM, opisane modulatory są też znane pod nazwą **modulatorów kwadratowych**.

Wadą modulacji nieliniowej jest jej praktyczna niedoskonałość z uwagi na niedostateczną filtrację, w wyniku której przebieg modulowany nie jest liniowy, a więc zniekształcony. Typowym zniekształceniem jest tu niesymetria dodatniej i ujemnej połówki przebiegu zmodulowanego.

4.1.2 Modulacja liniowa

W przypadku gdy zmodulowana fala powinna mieć dużą moc, jak np., w nadajnikach radiofonicznych, a także dobrą liniowość, niezbędne jest zastosowanie modulacji **liniowej**. W procesie takiej modulacji wykorzystuje się charakterystyki liniowe. Typowy układ modulatora liniowego pokazano na rys. 4.5.



Rys. 4.5 Modulator liniowy

Wzmacniacz tranzystorowy w układzie wspólny emiter pracuje w klasie C tak, że jest odcięty (polaryzacji bazy nie pokazano). Obciążenie stanowi równoległy obwód rezonansowy LC nastrojony na częstotliwość nośną i dlatego równoważny czystej rezystancji. Zapewnia to dla składowej zmiennej liniową charakterystykę o stałym nachyleniu, jak na rys. 4.6. Wejściowe napięcie fali nośnej (RF) ma stałą i dostatecznie dużą amplitudę, aby punkt pracy tranzystora zmieniał się od odcięcia i nasycenia, przy czym napięcie U_{ce} „spada” raz na każdy okres. Powoduje to impulsowy prąd kolektora o częstotliwości nośnej. Dzięki temu, że obciążenie stanowi obwód rezonansowy LC, tłumione są składowe dalekie od częstotliwości nośnej i napięcie wyjściowe jest przy braku modulacji sinusoidalne (pamiętajmy, że wzmacniacz ze wspólnym emiterem odwraca fazę napięcia).

Sygnał modulujący o amplitudzie U_m zostaje dodany do napięcia zasilania wzmacniacza U_{cc} (stąd układ ten może być nazwany wzmacniaczem z modulowanym napięciem zasilania) i stopniowo, w stosunku do szybkości zmian napięcia fali nośnej, przesuwając prostą oporu obciążenia względem charakterystyki wyjściowej wzmacniacza. W efekcie, modulacji ulega wartość szczytowa prądu kolektora I_c , a wraz z nią napięcie wyjściowe U_{ce} , które wynosi:

$$U_{ce} = (U_{cc} + U_m) - U_{cemin} \quad (4.25)$$

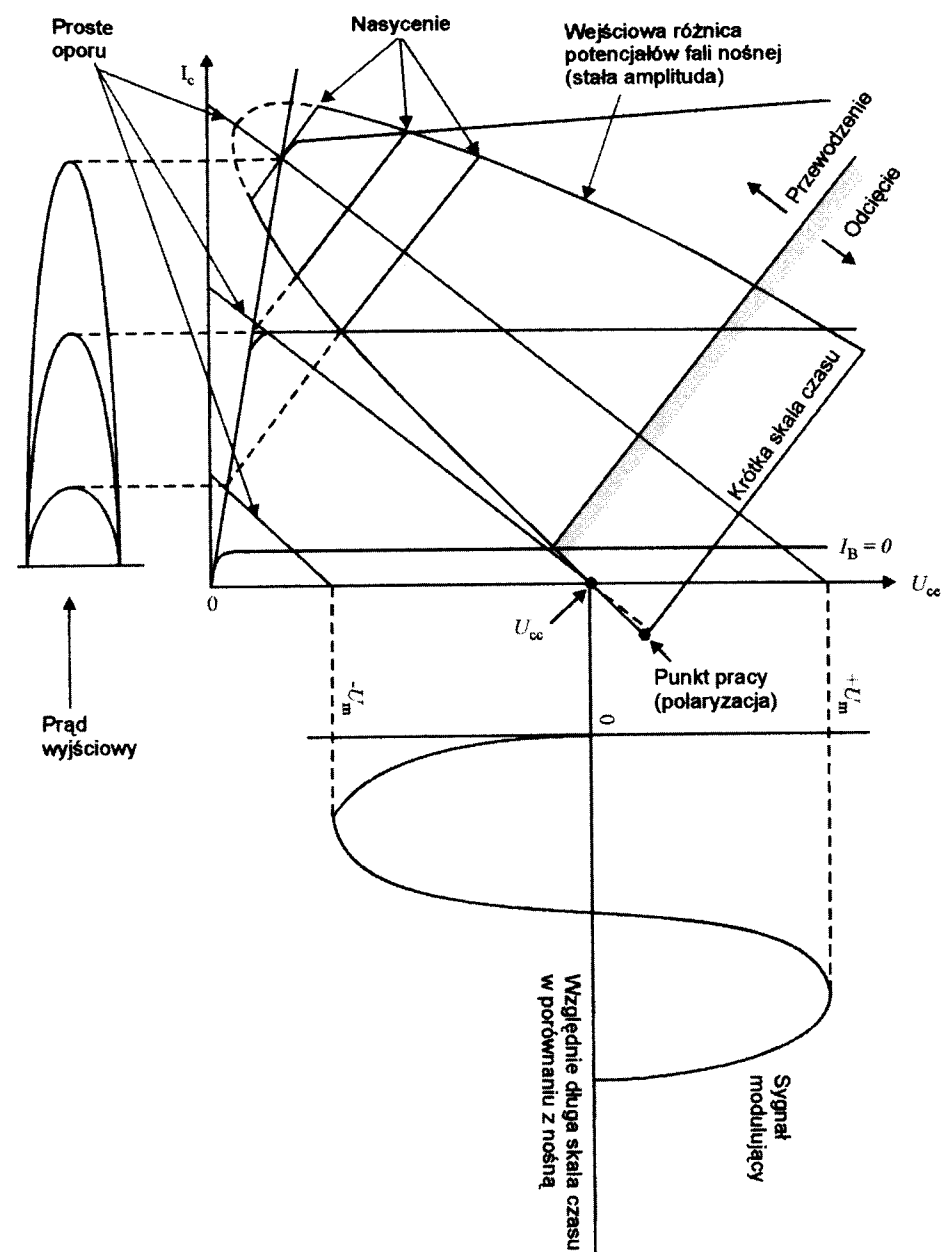
gdzie U_{cemin} – najniższe napięcie osiągane, jak już wspomniano, w każdym dodatnim półokresie fali nośnej dla wszystkich wartości U_m . Przyjmując, iż ta wartość minimalna opisuje prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych, możemy napisać:

$$U_{cemin} = a(U_{cc} + U_m) \quad (4.26)$$

lub zmieniając oznaczenie:

$$U_{cemin} = k(U_{cc} + U_m) \quad (4.27)$$

gdzie k – stały współczynnik proporcjonalności, którego wartość zależy od parametrów układu.



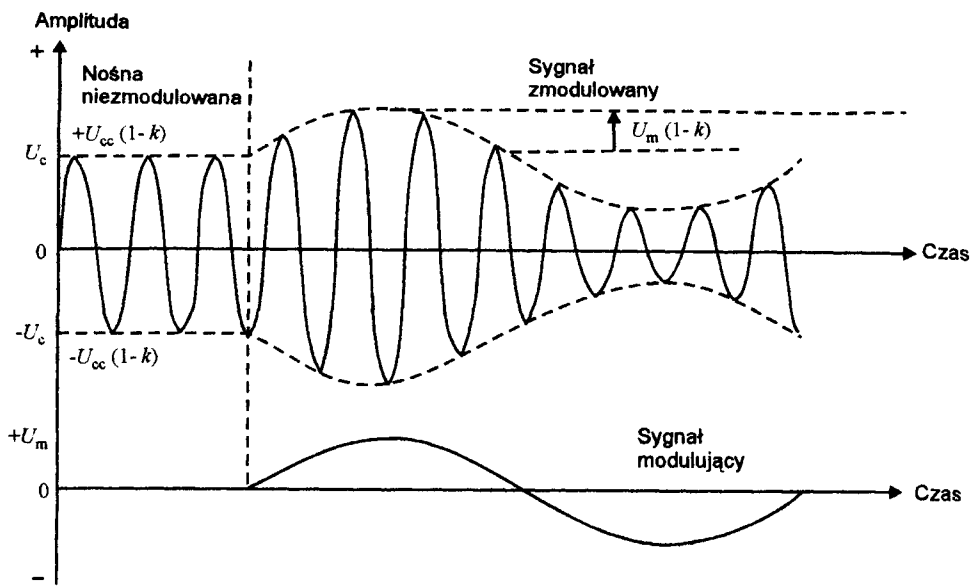
Rys. 4.6 Charakterystyka wyjściowa tranzystora

Podstawiając równanie (4.27) do (4.25) otrzymujemy:

$$U_{ce} = (U_{cc} + U_m) - k(U_{cc} + U_m) = \quad (4.28)$$

$$= U_{cc} + U_m - kU_{cc} - kU_m = \quad (4.29)$$

$$= (U_{cc} + U_m)(1 - k) \quad (4.30)$$



Rys. 4.7 Modułowany przebieg wyjściowy wzmacniacza mocy

Przebieg wyjściowy układu jest przemienny o częstotliwości nośnej, którego obwiednię opisuje równanie (4.30). Przedstawiono go na rys. 4.7, skąd widzimy, że w układzie powstaje pełna modulacja AM o przebiegu jak na rys. 4.4. Wytwarzany sygnał jest mało zniekształcony, a sprawność wzmacniacza wynosi około 80%.

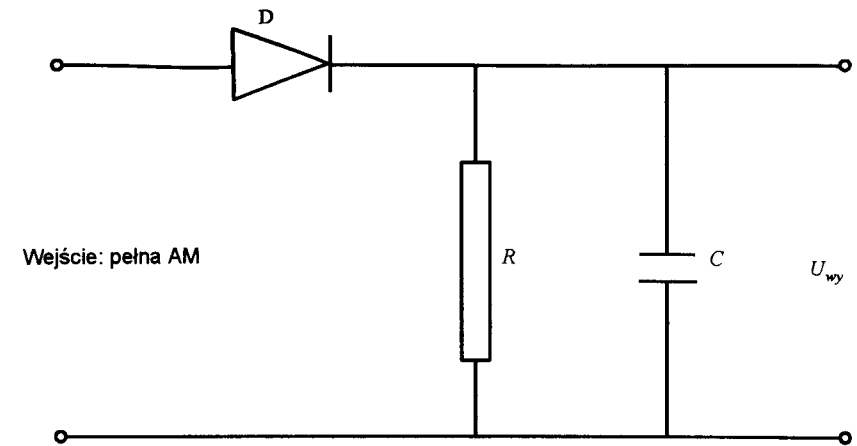
4.1.3 Demodulacja pełnej fali AM

Gdy pełny sygnał AM zostanie pomnożony przez swą składową o częstotliwości nośnej, otrzymany tym sposobem przebieg będzie zawierał oryginalny sygnał informacyjny $m(t)$. Jedną z metod uzyskiwania tego iloczynu polega na użyciu elementu nieliniowego o charakterystyce kwadratowej. Czynnikiem kwadratowym tej charakterystyki spowoduje mnożenie składowej o częstotliwości nośnej przez sygnał zmodulowany. W efekcie powstanie składowa z pasma podstawowego. W odróżnieniu od procesu modulacji, nie jest do tego potrzebny oddzielny przebieg o częstotliwości nośnej.

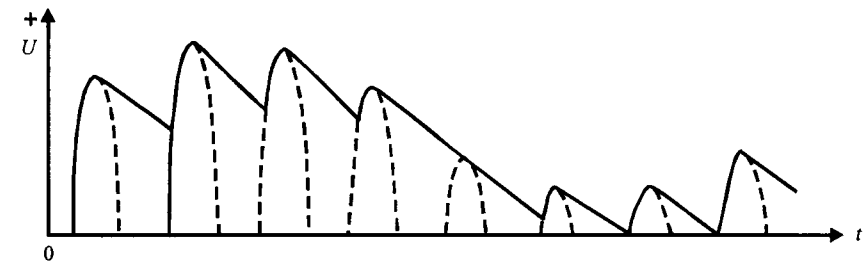
Najczęściej używanym przy demodulacji pełnej fali AM elementem o charakterystyce kwadratowej jest dioda w.c.z. Aby układ z diodą działał w sposób wcześniej opisany, dioda musi pracować jako element małosygnałowy, tzn. pozostawać cały czas w stanie przewodzenia.

Na rysunku 4.8 zilustrowano inną metodę demodulacji pełnego sygnału AM, w której dioda pracuje jako element wielkosygnałowy. Napięcie wejściowe przesuwając punkt pracy diody w tak dużym zakresie, że przechodzi ona w każdym okresie od stanu przewodzenia do stanu zaporowego i z powrotem. Układ odtwarza obwiednię (dodatkowo lub ujemne półokresy zależą od sposobu podłączenia diody) i dlatego jest nazywany **detektorem obwiedni**.

Tak opisany proces demodulacji ma miejsce gdy dioda jest idealna, a mianowicie



Rys. 4.8 Detektor diodowy



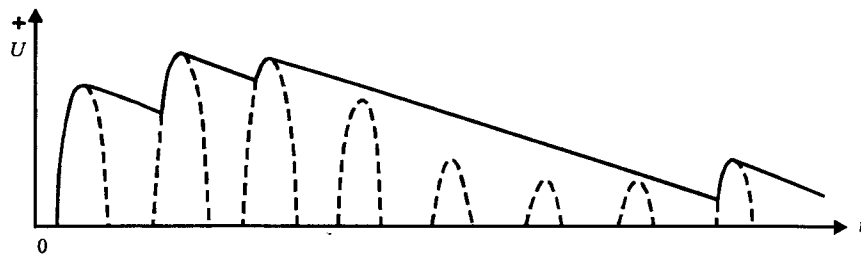
Rys. 4.9 Napięcie wyjściowe detektora diodowego

jej opór przewodzenia jest zerowy, a opór w stanie zaporowym nieskończony. W dodatnich półokresach sygnału modulującego dioda przewodzi, a napięcie na kondensatorze U_c jest równe u_{we} . Stała czasowa RC winna być duża w porównaniu z okresem sygnału modulowanego. Gdy napięcie na wejściu spada po osiągnięciu wartości szczytowej, kondensator nie zdąży się rozładować przez diodę ze względu na dużą stałą czasową i nie nadąży za spadkiem napięcia wejściowego. Rozładowanie zachodzi wolno przez opór R . Przebieg napięcia U_c pokazano na rys. 4.9.

Dzięki filtracji dolnoprzepustowej, powodującej usunięcie składowych tętnień wysokiej częstotliwości, uzyskiwany sygnał wiernie odpowiada przebiegowi obwiedni, która jest oczywiście odpowiednikiem sygnału modulującego. Gdyby stała czasowa była jednak zbyt duża, mogłoby się pojawić zjawisko znane pod nazwą **przylegania do ujemnego szczytu** (ang. *negative peak clipping*, przyp. tłum.).

Wymagana wartość stałej czasowej zależy od szybkości zmian napięcia obwiedni w czasie. Zależy to z kolei od głębokości modulacji m oraz częstotliwości sygnału modulującego. Powstają wówczas zniekształcenia, jak na rys. 4.10. Jak wykazał Connor¹⁾, stała czasowa powinna spełniać warunek:

¹⁾ Connor, F.R., *Modulation*, wyd. 2, Edward Arnold, 1982, ss. 80, 81. ISBN 0-7131-3457-7.



Rys. 4.10 Przyleganie do szczytu ujemnego

$$RC \leq \frac{\sqrt{1-m^2}}{m\omega_m} \quad (4.31)$$

który powinien być spełniony dla mniejszych wartości m .

Ćwiczenie sprawdzające 4.4 Fala nośna o amplitudzie 5 V jest modulowana sygnałem o amplitudzie 2 V i częstotliwości 4 kHz. Celem odzyskania sygnału informacyjnego zastosowano detektor diodowy z oporem 10 kΩ. Dobrać odpowiednią wartość pojemności detektora.

4.1.4 Modulacja zrównoważona

Zaletą pełnej modulacji AM jest możliwość zastosowania w odbiorniku prostego i taniego układu detekcyjnego. Większa część mocy jest tu jednak przesyłana na częstotliwości nośnej co jest nieekonomiczne, gdyż fala nośna nie niesie informacji. Inny rodzaj modulacji AM jest stosowany w **modulatorze zrównoważonym**, który nie wytwarza fali nośnej, a jedynie dolną i górną wstęgę boczną. Modulacja ta jest znana pod nazwą **modulacji dwuwstęgowej ze stłumioną falą nośną** (DSBSC).

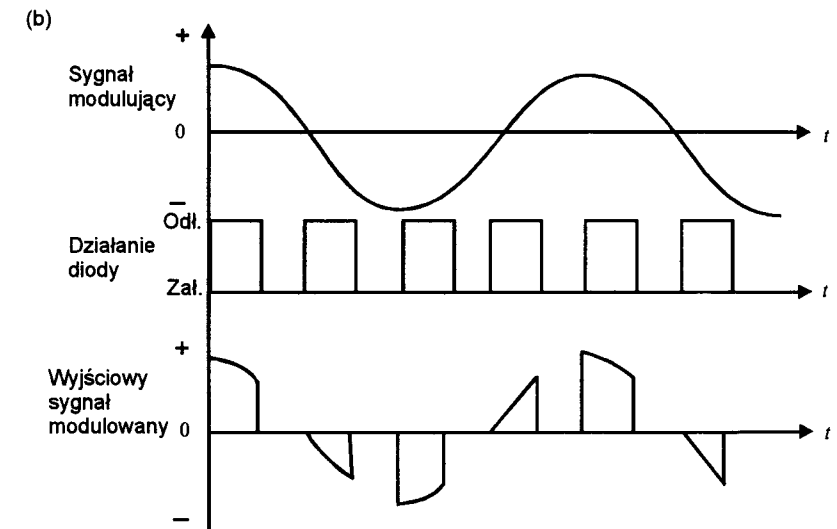
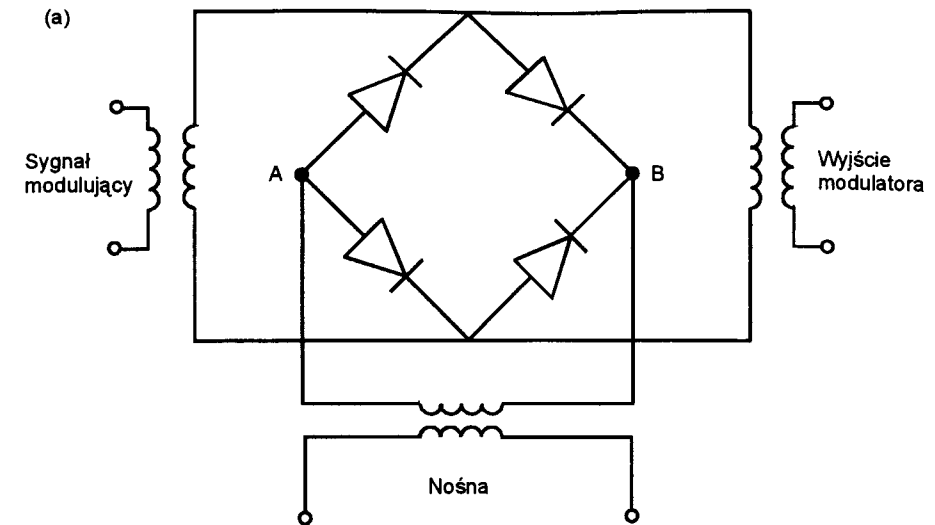
Jedną z metod uzyskiwania modulacji DSBSC jest tzw. modulator Cowana, pokazany na rys. 4.11. Przez jedną połowę okresu fali nośnej w punkcie A panuje napięcie dodatnie, a w punkcie B napięcie ujemne i wszystkie cztery diody są spolaryzowane w kierunku przewodzenia. Powoduje to zwarcie uzwojeń obu transformatorów obwodu mostka diodowego i dlatego nie pojawia się napięcie na wyjściu układu. Przez drugą połowę okresu fali nośnej diody zostają spolaryzowane w kierunku zaporowym, mostek diodowy zostaje rozarty i sygnał zmodulowany przechodzi na wyjście układu. Przebieg wyjściowy jest taki, jak iloczyn sygnału modulującego i dodatnich półokresów fali nośnej, co pokazano na rys. 4.11b.

Analiza modulatora Cowana polega na pomnożeniu sygnału modulującego przez szereg Fouriera reprezentujący falę nośną:

$$g(t) = kU_m \cos \omega_m t \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \omega_c t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_c t + \dots \right) \right] = \quad (4.32)$$

$$= \frac{kU_m \cos \omega_m t}{2} + \frac{kU_m}{\pi} [\sin(\omega_c - \omega_m)t + \sin(\omega_c + \omega_m)t] + \dots \quad (4.33)$$

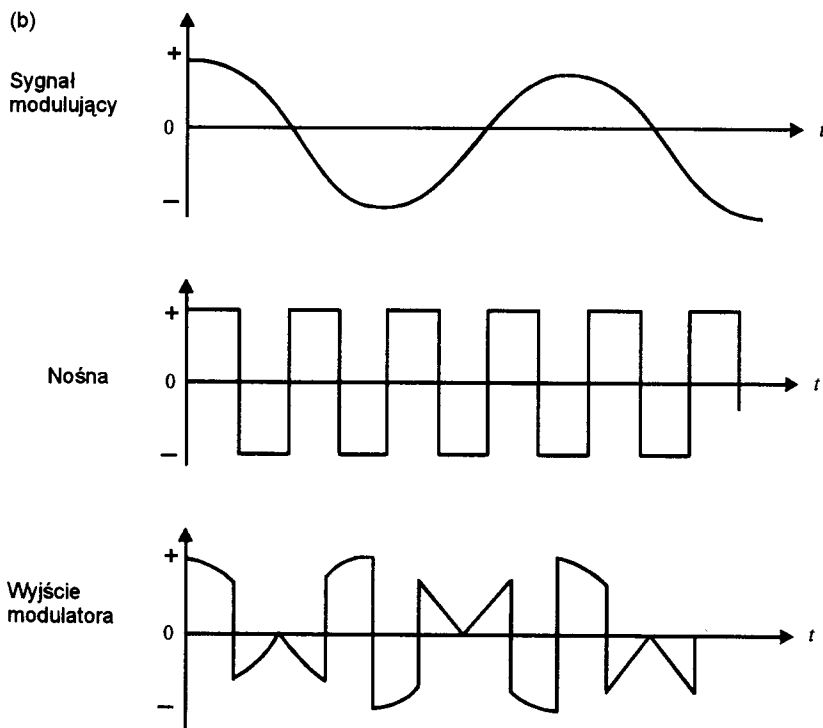
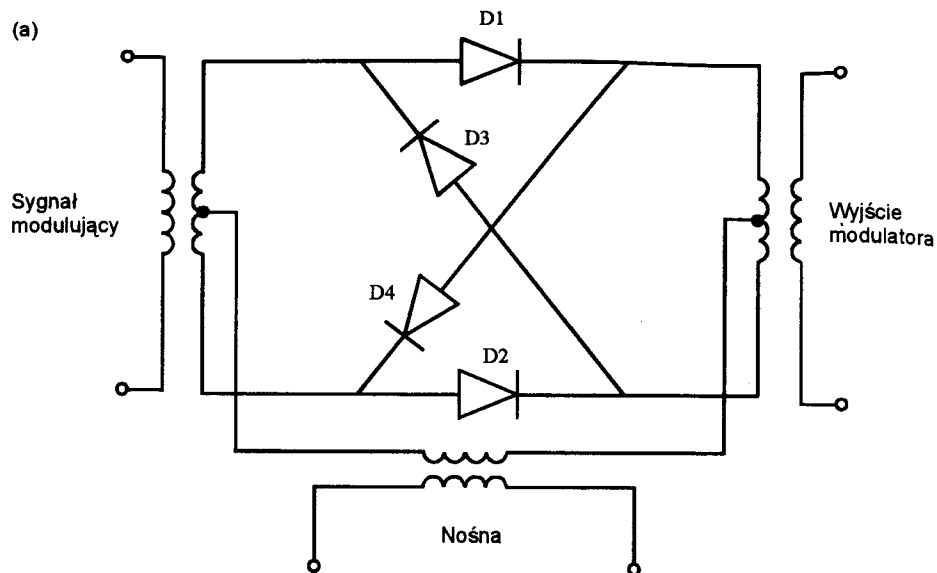
gdzie k – stała zależna od układu.



Rys. 4.11 Modulator Cowana: a – schemat; b – przebiegi

Wzór (4.33) zawiera składową z pasma podstawowego, górny i dolny prążek boczny – reprezentujące przebieg DSBSC, a także składowe częstotliwościowe wyższych rzędów ześrodkowane wokół nieparzystych wielokrotności ω_c . Nie ma tu składowej o częstotliwości nośnej. Filtracja dolnoprzepustowa zapewnia wyodrębnienie użytecznych składowych fali DSBSC, a eliminację wszystkich pozostałych.

Na rysunku 4.12 pokazano modulator pierścieniowy, w którym cztery diody tworzą „pierścień”. Przewodzą tu, w zależności od połówki okresu, albo diody D1 i D2, a diody D3 i D4 są spolaryzowane zaporowo, albo odwrotnie. W rezultacie wartość chwilowa sygnału modulującego przechodzi bezpośrednio na wyjście układu gdy diody D1 i D2 przewodzą lub też ze zmianą fazy, gdy przewodzą z kolei diody D3 i D4. Powstający przebieg pokazano na rys. 4.12b. Układ pierścieniowy działa więc jak odwracający fazę



Rys. 4.12 Modulator pierścieniowy: a – schemat; b – przebiegi

przełącznik o częstotliwości przełączania równej częstotliwości nośnej. Analiza układu jest podobna do analizy modulatora Cowana, lecz fala prostokątna nie jest unipolarna, a bipolarna. Modulator wytwarza też falę DSBSC, przy czym energia przebiegu impulsowego na wyjściu jest dwa razy większa, niż w przypadku modulatora Cowana.

Ćwiczenie sprawdzające 4.5 Przeanalizować matematycznie modulator pierścieniowy i wyznaczyć wyrażenie matematycznie opisujące wyjściowy sygnał zmodulowany.

Detektor obwiedni nie jest w stanie odtworzyć sygnału DSBSC za pomocą detekcji diodowej, gdyż jak widać na rys. 4.11b i 4.12b kształt obwiedni się do tego nie nadaje. Odbiór jest natomiast możliwy za pomocą innego modulatora zrównoważonego. Odbierany sygnał zmodulowany zostaje pomnożony przez sygnał będący wersją oryginalnej fali nośnej, który powinien być zgodny w fazie z odbieranym sygnałem DSBSC. Detekcja tego typu znana jest pod nazwą **detekcji koherentnej**. Istnieją dwa sposoby wytworzenia przebiegu nośnego w odbiorniku:

1. Przesyłanie fali nośnej za pomocą oddzielnego kanału.
2. Wytwarzanie w nadajniku fali nośnej o zredukowanej amplitudzie, znanej pod nazwą **pilota**. Daje to istotną oszczędność mocy w porównaniu z pełną modulacją AM i nie wymaga oddzielnego przesyłania sygnału nośnego.

Odbiór ulega pogorszeniu, jeśli faza fali nośnej w odbiorniku nie jest właściwa. Weźmy pod uwagę detekcję koherentną sygnału DSBSC z falą nośną o prawidłowej częstotliwości, lecz dowolnej fazie ϕ , jak na rys. 4.13.

$$u_{wy} = AB \cos \omega_m t \cos \omega_c t \cos(\omega_c t + \phi) = \quad (4.34)$$

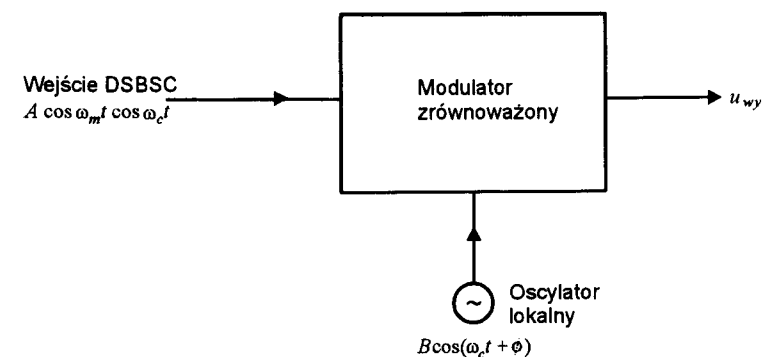
$$= \frac{c}{2} \cos \omega_m t [\cos(\omega_c t - \omega_c t - \phi) + \cos(\omega_c t + \omega_c t + \phi)] = \quad (4.35)$$

$$= \frac{c}{2} \cos \omega_m t [\cos \phi + \cos(2\omega_c t + \phi)] = \quad (4.36)$$

$$= \frac{c}{2} \cos \omega_m t \cos \phi + \frac{c}{2} \cos \omega_m t \cos(2\omega_c t + \phi) \quad (4.37)$$

gdzie c – stała.

Pierwszy składnik wyrażenia (4.37) jest pożądanym sygnałem zdemodulowanym, lecz pomnożonym przez $\cos \phi$. Ponadto mamy parę częstotliwości bocznych, ześrodkowanych wokół podwójnej częstotliwości nośnej. Można je usunąć za pomocą filtra dolnoprzepustowego. Amplituda sygnału zdemodulowanego zmniejsza się wraz ze wzrostem fazy fali nośnej w odbiorniku ϕ tak, iż dla $\phi = 90^\circ$ znika zupełnie, czyniąc



Rys. 4.13 Detekcja koherentna

detekcję niemożliwą. W praktyce należy więc zapewnić właściwe fazowanie w układach detekcji koherentnej.

Każda ze wstęg bocznych przy pełnej modulacji AM zawiera całą informację sygnału z pasma podstawowego. Z punktu widzenia informacji można więc osiągnąć zadowalającą transmisję używając **modulacji jednowstęgowej** (SSB). Pozwala to na dwukrotne zmniejszenie szerokości pasma lub podwojenie pojemności kanału przy zachowaniu pasma. Ponadto możliwe jest zredukowanie mocy nadawanej. Jedną z metod uzyskiwania SSB jest zastosowanie modulatora zrównoważonego. Wytworzona na jego wyjściu fala DSBSC poddana zostaje filtracji, celem wyeliminowania dolnej lub górnej wstęgi bocznej. Modulacja SSB, tak jak DSBSC, wymaga zastosowania detektora koherentnego w odbiorniku. Analiza wpływu przesunięcia fazy ϕ sygnału nośnego używanego do detekcji w odbiorniku ²⁾ tym różni się od przeprowadzonej dla fali DSBSC, iż faza ta nie ma wpływu na amplitudę demodulowanego sygnału. Zdemodulowany sygnał ma bowiem postać:

$$m(t) = U_m \sin(\omega_m t + \phi) \tag{4.38}$$

gdzie występuje jedynie przesunięcie fazy. Daje ono dodatkowe opóźnienie czasowe transmisji i jest nazywane **opóźnieniem fazy** ϕ , które jeśli jest niewielkie można w systemach akustycznych uznać za dopuszczalne. Jego wpływ może okazać się jednak bardziej krytyczny w niektórych systemach teleinformatycznych i telewizyjnych.

4.2 MODULACJA KĄTA

Zamiast amplitudy, można modulować także sygnałem informacyjnym kąt fazowy fali nośnej. Taka fala modulowana, w przeciwieństwie do fali AM gdzie informacja jest zawarta w amplitudzie, ma amplitudę stałą. Modulacja kąta, a szczególnie modulacja częstotliwości FM, jest lepsza od AM, gdyż przy zastosowaniu ogranicznika przed demodulacją pozwala na znaczącą redukcję wpływu szumów powodujących zmiany amplitudy sygnału zmodulowanego. Powszechnie znanym tego przykładem jest częste występowanie zakłóceń statycznych w odbiorze radiowym AM. Odbiór FM jest natomiast odporny na tego rodzaju zakłócenia związane z amplitudą.

Sygnał zmodulowany kątowo ma postać:

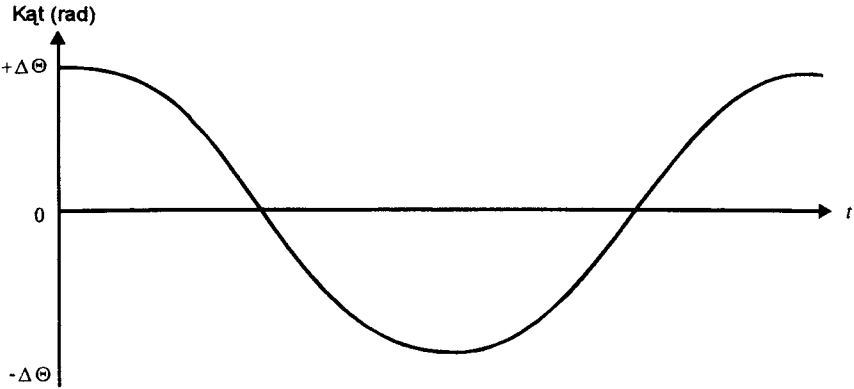
$$g(t) = A \cos \theta(t) \tag{4.39}$$

gdzie kąt $\theta(t)$ jest proporcjonalny do amplitudy sygnału modulującego. Jak już powiedziano, modulacja kąta dzieli się na modulację PM i FM.

4.2.1 Modulacja fazy

Założmy, iż sygnał modulujący $m(t)$ jest pojedynczą falą sinusoidalną o postaci:

$$m(t) = U_m \cos \omega_m t \tag{4.40}$$



Rys. 4.14 Modulacja fazy

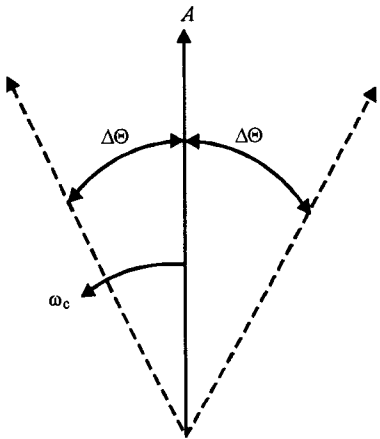
Przebieg modulowany fazowo jest wówczas dany wyrażeniem:

$$g(t) = A \cos [2\pi f_c t + \Delta\theta \cos (2\pi f_m t)] \tag{4.41}$$

gdzie $\cos 2\pi f_c t$ – niezmodulowana fala nośna, $\Delta\theta$ – jest równe kU_m , k – stała modulatora podawana w radianach.

Wyrażenie $\Delta\theta \cos (2\pi f_m t)$ można zilustrować przebiegiem czasowym z rys. 4.14. Jest to sinusoida przyjmująca wartości chwilowe w granicach $\pm \Delta\theta$ radianów. Równanie (4.41) pozwala stwierdzić, że fala zmodulowana fazowo ma częstotliwość środkową, czyli średnią, f_c . Jej faza jest modulowana w taki sposób, że wartość szczytowa, czyli *dewiacja fazy* wynosi $\pm \Delta\theta$ radianów. Ten sygnał PM jest przedstawiony w postaci wykresu wskazowego z rys. 4.15, gdzie wskaz o amplitudzie A wiruje ze średnią prędkością kątową ω_c i oscyluje w granicach $\pm \Delta\theta$ wokół wartości średniej równej zero.

Na rysunku 4.15 pokazano, że szybkość z jaką wskaz wypadkowy porusza się względem wskazu niezmodulowanej fali nośnej jest proporcjonalny do dewiacji częstot-



Rys. 4.15 Wykres wskazowy sygnału PM

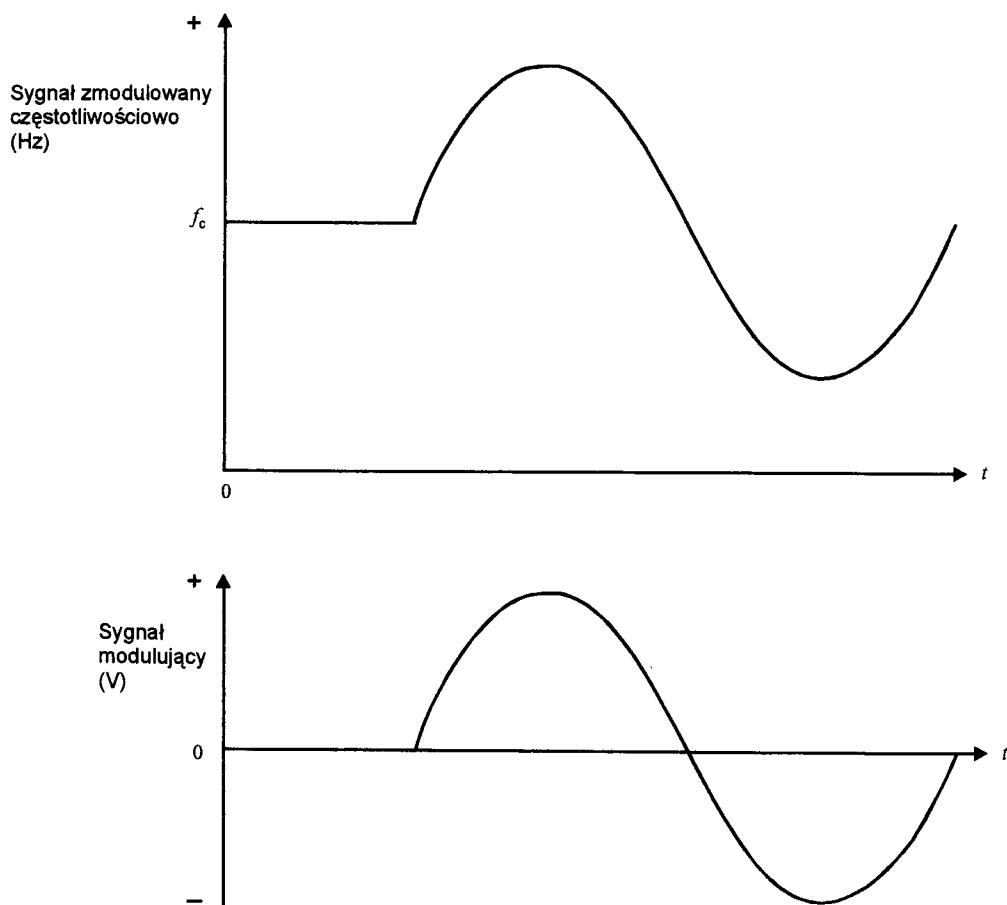
²⁾ Connor, F.F., *Modulation*, wyd. 2, Edward Arnold, 1982, s. 125. ISBN 0-7131-3457-7.

liwości względem f_c , która jest z kolei proporcjonalna zarówno do f_m jak do U_m . Z wykresu wynika też fakt, iż częstotliwość chwilowa sygnału modulowanego zmienia się sinusoidalnie wokół wartości f_c .

Modulacja fazy jest rzadko używana w systemach analogowych, gdyż modulacja częstotliwości pozwala na zastosowanie prostszych dyskryminatorów częstotliwości w odbiornikach. Demodulacja sygnału PM jest ogólnie biorąc bardziej złożona. Wymaga przykładowo układu zawierającego demodulator FM oraz integrator. Modulacja fazy jest natomiast szeroko stosowana w transmisji cyfrowej i zostanie przedstawiona w rozdziale 5.

4.2.2 Modulacja częstotliwości

W systemie FM sygnał modulujący powoduje zmiany częstotliwości sygnału na wyjściu modulatora względem częstotliwości fali nośnej. Przykładowo częstotliwość wzrasta, gdy sygnał modulujący jest dodatni i vice versa. Zmiana częstotliwości, a nie fazy jak



Rys. 4.16 Modulacja częstotliwości

przy modulacji PM, jest proporcjonalna do amplitudy sygnału modulującego. Sygnał FM pokazano na rys. 4.16. Wyrażenie opisujące sygnał FM jest postaci:

$$g(t) = A \sin \left[2\pi f_c t + 2\pi k \int_0^t U_m \cos(2\pi f_m t) dt \right] = \quad (4.42)$$

$$= A \sin \left[2\pi f_c t + \frac{kU_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \right] \quad (4.43)$$

Czynnik kU_m jest, jak wynika z analizy wymiarowej, wyrażony w hercach i reprezentuje maksymalną zmianę częstotliwości wywołaną przez sygnał modulujący (gdy $\sin(2\pi f_m t)$ równa się $+1$ lub -1) i jest nazywany **dewiacją częstotliwości** Δf . Wyrażenie kU_m/f_m nosi nazwę **wskaźnika modulacji** M , który jest liczbą rzeczywistą i bezwymiarową

$$M = \frac{kU_m}{f_m} = \quad (4.44)$$

$$= \frac{\text{dewiacja częstotliwości}}{f_m} = \quad (4.45)$$

$$= \frac{\Delta f}{f_m} \quad (4.46)$$

Sygnał $g(t)$ przybiera postać:

$$g(t) = A \sin(\omega_c t + M \sin \omega_m t) \quad (4.47)$$

PM i FM stanowią przykłady modulacji kąta, przy której modulowany jest kąt fazowy fali nośnej. Porównując wyrażenia (4.41) i (4.47) zauważamy, iż są one podobnego typu. Dla fali PM dewiacja fazy jest, jak już zaznaczyliśmy, proporcjonalna do amplitudy sygnału modulującego U_m . W przypadku fali FM dewiacja fazy jest jak widać ze wzoru (4.47) proporcjonalna do U_m/f_m . Z dalszego porównania sygnałów FM i PM widać, iż przy modulacji fazy PM dewiacja częstotliwości jest proporcjonalna do iloczynu $U_m f_m$. Dla sygnału FM natomiast dewiacja Δf jest proporcjonalna jedynie do amplitudy U_m . Temu właśnie modulacja FM zawdzięcza swą nazwę, częstotliwość sygnału jest bowiem modulowana, czyli zmienia się w bezpośredniej zależności od $U_m \sin \omega_m t$. Maksymalna dewiacja częstotliwości jest proporcjonalna do U_m , a ω_m decyduje tylko o szybkości zmian częstotliwości sygnału FM. Wykres wskazowy fali PM jest podobny do wskazów PM. Szczytowa dewiacja fazy równa jest M . Faza ta, jak dla fali PM, jest także modulowana przez czynnik $\sin \omega_m t$.

Wartość szczytowa wskaźnika modulacji, gdy dewiacja częstotliwości i częstotliwość modulująca przybierają wartości maksymalne, nosi nazwę **wskaźnika dewiacji** i stanowi parametr systemów FM podawany często w normach międzynarodowych ustanowionych dla systemów radiofonicznych:

$$\text{wskaźnik dewiacji} = \frac{\hat{\Delta f}}{\hat{f}_m} \quad (4.48)$$

PRZYKŁAD 4.2

Stereofoniczny system radiofonii FM ma dziewięć 75 kHz i maksymalną częstotliwość modulującą 15 kHz. Wyznaczyć wskaźnik dewiacji.

ROZWIĄZANIE

$\hat{\Delta}f$ wynosi ± 75 kHz, $\hat{f}_M$ jest równe 15 kHz

$$\text{wskaźnik dewiacji} = \frac{\hat{\Delta}f}{\hat{f}_m} = \quad (4.49)$$

$$= \frac{75 \text{ kHz}}{15 \text{ kHz}} \quad (4.50)$$

Wskaźnik dewiacji jest więc równy 5.

Posługując się tożsamością trygonometryczną można podany uprzednio wzór (4.47) opisujący sygnał FM rozwinąć w taki sposób, aby wyznaczyć widmo sygnału zmodulowanego pojedynczym przebiegiem sinusoidalnym:

$$g(t) = A \sin \omega_c t \cos(M \sin \omega_m t) + A \cos \omega_c t \sin(M \sin \omega_m t) \quad (4.51)$$

Wyrażenie $\cos(M \sin \omega_m t)$ można rozwinąć w nieskończony szereg potęgowy:

$$\cos(M \sin \omega_m t) = 1 - \frac{M^2 \sin^2 \omega_m t}{2!} + \frac{M^4 \sin^4 \omega_m t}{4!} + \dots \quad (4.52)$$

Stosujemy teraz dwie tożsamości:

$$\sin^2 \omega_m t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega_m t) \quad (4.53)$$

oraz:

$$\sin^4 \omega_m t = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\omega_m t + \frac{1}{8} \cos 4\omega_m t \quad (4.54)$$

przy założeniu, iż potęgi wyższego rzędu z $\sin \omega_m t$ we wzorze (4.52) są wszystkie parzyste. Podstawiając wzory (4.53) i (4.54) do wzoru (4.52) i upraszczając, rozwijamy czynnik $\cos(M \sin \omega_m t)$ otrzymując:

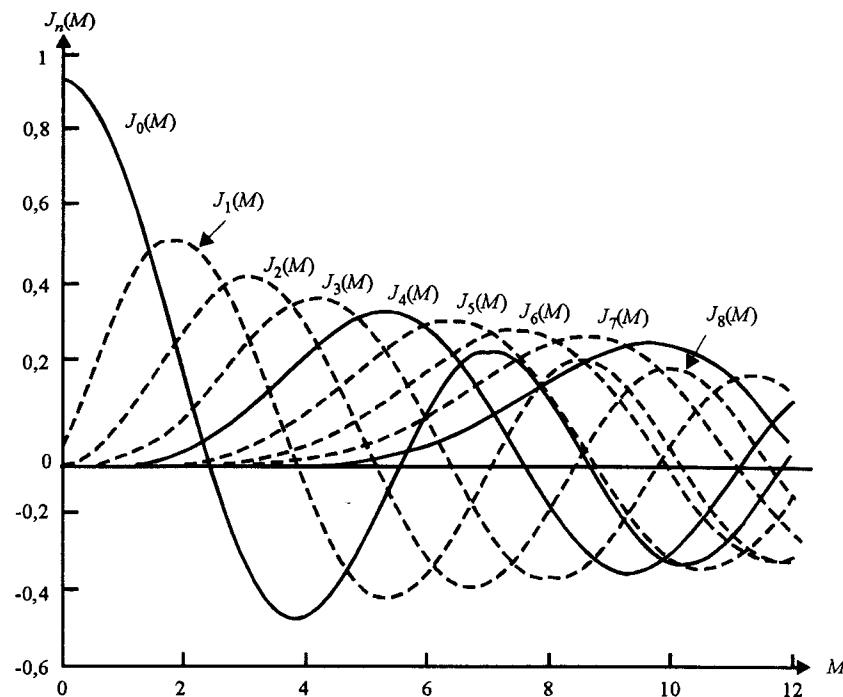
$$\cos(M \sin \omega_m t) = a_0 + a_2 \cos 2\omega_m t + a_4 \cos 4\omega_m t + \dots \quad (4.55)$$

Stałe a_0 , a_2 , a_4 itd., są współczynnikami szeregu potęgowego zależnymi od M . W podobny sposób rozwijamy wyrażenie $\sin(M \sin \omega_m t)$ do postaci:

$$\sin(M \sin \omega_m t) = a_1 \sin \omega_m t + a_3 \sin 3\omega_m t + a_5 \sin 5\omega_m t + \dots \quad (4.56)$$

Równania (4.55) i (4.56) można teraz podstawić do wzoru (4.51). Uzyskane równanie będzie zawierać dalsze iloczyny składników typu $\cos$ i $\sin$. W ten sposób powstaną składowe widma o następujących częstotliwościach:

$$\omega_c \pm \omega_m, \omega_c \pm 2\omega_m, \omega_c \pm 3\omega_m, \dots, \omega_c \pm \infty \omega_m$$



Rys. 4.17 Funkcje Bessela

Szczegółowa analiza widmowa sygnału FM przy modulacji pojedynczym sygnałem sinusoidalnym znajduje się m.in. w pracy Stremlera³⁾, lecz nawet bez uciekania się do szczegółowych przekształceń można wyrażenie (4.51) napisać w postaci:

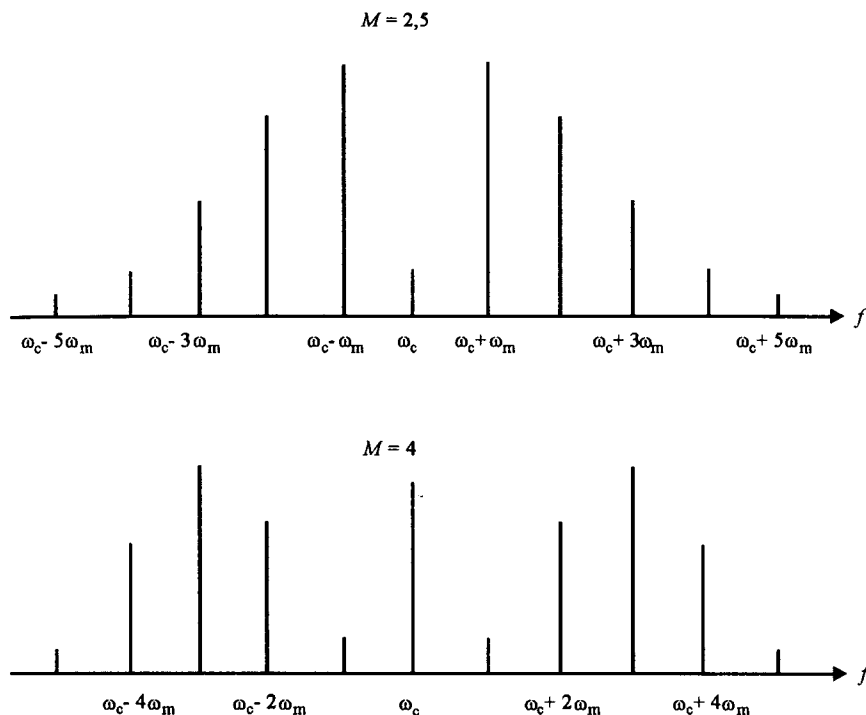
$$\begin{aligned} & A \sin \omega_c t \cos(M \sin \omega_m t) + A \cos \omega_c t \sin(M \sin \omega_m t) = \\ & = A [a_0 \sin \omega_c t + a'_1 \sin(\omega_c + \omega_m)t + a'_2 \sin(\omega_c + 2\omega_m)t + \\ & \quad + a'_3 \sin(\omega_c + 3\omega_m)t + \dots + a'_\infty \sin(\omega_c + \infty \omega_m)t] \end{aligned} \quad (4.57)$$

Każdy ze współczynników równania (4.57) stanowi szereg względem M , opisujący funkcję Bessela pierwszego rodzaju. Dlatego zapisujemy je zwykle w postaci $J_n(M)$, gdzie n oznacza rząd funkcji, a M stanowi argument funkcji. Wzór (4.57) przybiera postać:

$$\begin{aligned} & A \sin \omega_c t \cos(M \sin \omega_m t) + A \cos \omega_c t \sin(M \sin \omega_m t) = \\ & = A [J_0(M) \sin \omega_c t + J_1(M) \sin(\omega_c + \omega_m)t + J_2(M) \sin(\omega_c + 2\omega_m)t + \\ & \quad + J_3(M) \sin(\omega_c + 3\omega_m)t + \dots + J_\infty(M) \sin(\omega_c + \infty \omega_m)t] \end{aligned} \quad (4.58)$$

Wartości współczynników $J_n(M)$ dla każdego n i danego M znajdujemy na podstawie rodziny krzywych reprezentujących funkcje Bessela, podanych na rys. 4.17.

³⁾ Stremler, F.G., *Introduction to Communications Systems*, Addison-Wesley, 1977, ss. 273–275. ISBN 0-201-07244-0.



Rys. 4.18 Widmo sygnału FM

Widmo sygnału FM opisanego wzorem (4.58) ma nieskończoną szerokość pasma. W praktyce sygnał FM jest jednak sygnałem o ograniczonym pasmie. Analiza krzywych z rys. 4.17 ujawnia bowiem, iż dla każdej wartości n współczynnik $J_n(M)$ choć z natury oscylacyjny, dąży jednak do zera gdy n dąży do nieskończoności. Sygnał FM powstający przy modulacji pojedynczym sygnałem sinusoidalnym, jak opisany powyżej, zawiera częstotliwości składowe rozmieszczone symetrycznie, w odstępach harmonicznym ω_m po obu stronach częstotliwości nośnej do $\pm \infty$ Hz, jak na rys. 4.18. Zauważmy, iż dla pewnych wartości M , pary częstotliwości bocznych oraz sama składowa nośna mogą mieć zerowe amplitudy.

Przy projektowaniu systemu zakłada się, że jego szerokość pasma musi obejmować wszystkie znaczące prążki boczne przy zadanym wskaźniku dewiacji. Termin „znaczące” ma tu znaczenie subiektywne i oznacza, że jakość systemu jest akceptowalna dla użytkownika. Można przykładowo założyć, iż składowe boczne są istotne, o ile współczynnik odpowiedni $J_n(M)$ jest równy lub większy przykładowo od 1% amplitudy niezmodulowanej fali nośnej $J_0(0)$. Choć można to określić za pomocą wykresu z rys. 4.17, większą dokładność zapewni tu skorzystanie z tablic funkcji Bessela, podanych w dodatku D.

PRZYKŁAD 4.3

Sygnał FM ma wskaźnik dewiacji równy 5 i maksymalną częstotliwość modulującą 15 kHz. Oszacować szerokość pasma niezbędną do transmisji wszystkich składowych bocznych, których amplituda stanowi przynajmniej 1% amplitudy niezmodulowanej fali nośnej.

ROZWIĄZANIE

Na podstawie wzoru (4.58) stwierdzamy, że każdy składnik sinusoidalny generuje częstotliwości boczne $\omega_c \pm n\omega_m$, gdzie n – rząd składowej. W tym przykładzie poszukujemy najwyższej składowej bocznej, a więc takiego n , przy którym amplituda $J_n(M)$ jest nieco tylko większa od 0,01.

Korzystając z dodatku D stwierdzamy, że amplitudę niezmodulowanej fali nośnej otrzymujemy dla M i n równych zero. Jej znormalizowana wartość wynosi 1. Aby spełnić warunek na pasmo przy M równym 5, moduł współczynnika $J_n(5)$ winien spełniać nierówność:

$$J_n(5) > 0,01$$

oraz:

$$J_{n+1}(5) < 0,01$$

Z tablic funkcji Bessela wynika, iż warunek ten jest spełniony przy n równym 8.

Dlatego szerokość pasma powinna obejmować osiem par prążków bocznych, a zatem:

$$W = 2(8 \cdot 15 \text{ kHz}) = 240 \text{ kHz}$$

W praktycznie spotykanych systemach, szerokość pasma B zależy w znacznym stopniu od najwyższej częstotliwości zawartej w sygnale informacyjnym. Carson podał następującą regułę, znaną pod nazwą wzoru Carsona:

$$B = 2(\hat{F} + \hat{f}_m)$$

PRZYKŁAD 4.4

Oszacować szerokość pasma systemu radiofonicznego FM, dla którego: $\hat{F} = \pm 75 \text{ kHz}$, $\hat{f}_m = 15 \text{ kHz}$.

ROZWIĄZANIE

$$B = 2(\hat{F} + \hat{f}_m) = 2(75 + 15) \text{ kHz} = 180 \text{ kHz}$$

Zarówno w ostatnim przykładzie, jak i w przykładzie 4.3 punktem wyjścia jest standardowy system radiofoniczny FM, z którym zetknęliśmy się już w przykładzie 4.2. Porównując szerokość pasma wynikającą z reguły Carsona oraz z tablic funkcji Bessela widzimy, że są one nieco różne. W praktyce przyjmuje się tu pasmo 200 kHz, co jest kompromisem w stosunku do obu wartości.

4.2.3 Wąskopasmowa modulacja FM

Do tej pory opisaliśmy ogólny przypadek modulacji FM. Gdy $M > 1$, powstaje wiele prążków bocznych i taki sygnał zwany jest **szerokopasmowym** sygnałem FM. Jeśli natomiast $M < 1$, mamy do czynienia z **wąskopasmowym** sygnałem FM. Wynika stąd, iż wąskopasmowy sygnał FM ma znacznie węższe pasmo, niż sygnał szerokopasmowy. Ponadto, z uwagi na stosunkowo wąskie pasmo, wpływ szumów jest bardziej znaczący.

Wąskopasmowa modulacja FM wymaga dlatego większych wartości S/N , niż modulacja szerokopasmowa.

Sygnał FM opisany uprzednio wzorem (4.51) ma postać:

$$g(t) = A \sin \omega_c t \cos(M \sin \omega_m t) + A \cos \omega_c t \sin(M \sin \omega_m t) \quad (4.59)$$

Jeśli $M \ll 1$ mamy:

$$\cos(M \sin \omega_m t) \rightarrow 1$$

a ponieważ $\sin x$ dąży do x gdy x dąży do zera:

$$\sin(M \sin \omega_m t) \rightarrow M \sin \omega_m t$$

Wąskopasmowy sygnał FM można więc aproksymować wyrażeniem:

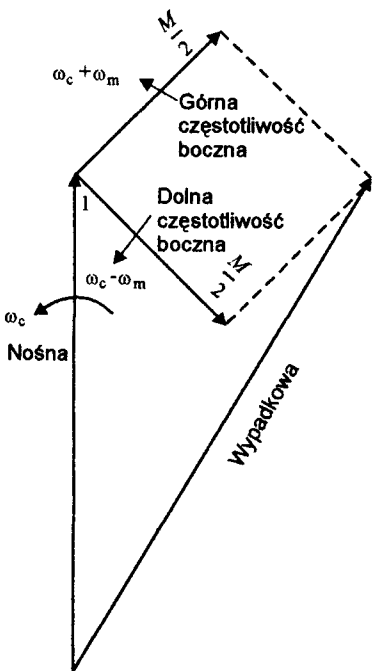
$$g(t) \approx A [\sin \omega_c t + \cos \omega_c t (M \sin \omega_m t)] = \quad (4.60)$$

$$= a \left[\sin \omega_c t + \frac{M}{2} \sin(\omega_m - \omega_c)t + \frac{M}{2} \sin(\omega_m + \omega_c)t \right] \quad (4.61)$$

które można też zapisać w postaci:

$$g(t) = a \left[\sin \omega_c t - \frac{M}{2} \sin(\omega_c - \omega_m)t + \frac{M}{2} \sin(\omega_c + \omega_m)t \right] \quad (4.62)$$

Równanie to przypomina zapis pełnej modulacji AM ze wzoru (4.5). Porównując wąskopasmowy sygnał FM z sygnałem AM stwierdzamy jednak, że składowe o częstot-



Rys. 4.19 Wykres wskazowy wąskopasmowego sygnału FM

liwościach bocznych mają *przeciwne* znaki i że oba typy modulacji obejmują takie samo pasmo, a mianowicie równe podwojonej częstotliwości sygnału modulującego. Wykres wskazowy ilustrujący wąskopasmowy sygnał FM pokazano na rys. 4.19 z którego wynika, że w odróżnieniu od modulacji AM, składowe o częstotliwościach bocznych są w przeciwfazie, co oprócz modulacji amplitudy powoduje modulację fazy fali nośnej. Obie te cechy rozpatrywanego sygnału znajdują zastosowanie w technice odbiorczej.

Pewne systemy telekomunikacyjne FM, takie jak analogowe systemy radiokomunikacji ruchomej oraz CB radio, są z zasady wąskopasmowe. W przypadku telekomunikacji fonicznej tego rodzaju stosuje się modulację FM przy typowej szerokości pasma mowy 3 kHz. Z uwagi na niewielki dysponowany zakres częstotliwości, systemy te pracują na zasadzie wąskiego pasma o typowym odstępnie kanałów około 20 kHz.

Wąskopasmowa modulacja FM jest kompromisem pomiędzy minimalną szerokością pasma wymaganą w systemie AM, a większą odpornością na szumy (a więc na zmiany amplitudy) szerokopasmowej modulacji AM. Znajduje także zastosowanie w generacji i odbiorze szerokopasmowych sygnałów FM i PM.

4.2.4 Generacja i demodulacja sygnałów FM

Szczegółowe rozpatrzenie wielu istniejących metod generacji i demodulacji sygnałów FM leży poza zakresem tej książki. Wspomnimy jedynie, iż modulacja FM może być dokonywana w sposób pośredni lub bezpośredni. Metoda **bezpośrednia** polega na tym, iż sygnał informacyjny moduluje bezpośrednio częstotliwość oscylatora. W tym celu używa się zwykle diody waraktorowej (o zmiennej reaktancji). Kiedy dioda $p-n$ jest spolaryzowana zaporowo, jej warstwa zubożona zachowuje się jak dielektryk tworząc pojemność. Przyłożony sygnał modulujący zmienia zaporowe napięcie polaryzacji, a tym samym pojemność diody. Gdy taką diodę umieścimy w obwodzie rezonansowym oscylatora, otrzymujemy modulację FM.

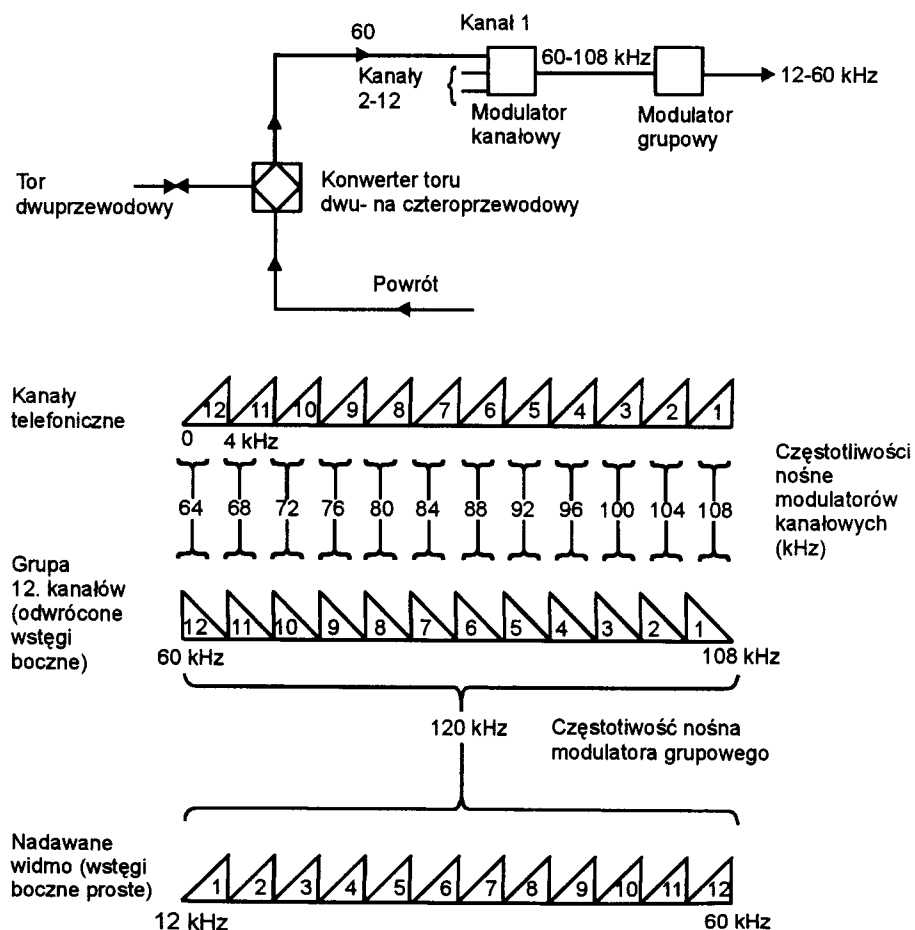
Bezpośrednia metoda modulacji szerokopasmowej o względnie dużej dewiacji częstotliwości nie daje się uzyskać za pomocą oscylatora kwarcowego. W tej sytuacji modulacja szerokopasmowa wymaga dużego wysiłku inżynierskiego, aby uzyskać generator fali nośnej spełniający surowe wymagania odnośnie stałości częstotliwości, jakie obowiązują w transmisji radiowej. Dużą stabilność oscylatora kwarcowego można wykorzystać za pomocą modulacji **pośredniej**. Stosuje się w tym celu zwykle metodę Armstronga, przy której modulacja fazy wraz z odpowiednim przetwarzaniem wstępnym sygnału modulującego jest dokonywana z użyciem oscylatora kwarcowego. Jak już powiedzieliśmy, modulacja PM jest związana z modulacją FM gdy jest to modulacja wąskopasmowa. Aby otrzymać szerokopasmowy sygnał FM o dostatecznie dużej dewiacji częstotliwości i odpowiedniej częstotliwości nośnej, stosuje się zwykle pewną liczbę powielaczy i mieszaczy.

Demodulatory FM są często określane mianem dyskryminatorów wytwarzających sygnał wyjściowy, którego amplituda jest w idealnym przypadku liniowo proporcjonalna do częstotliwości odbieranego sygnału. Najczęściej stosowanym typem dyskryminatora jest pętla fazowa, w której oscylator sterowany napięciem (VCO) nadąża za częstotliwością chwilową modulowanego sygnału FM. Napięcie sterujące VCO jest bowiem

w istocie sygnałem zdemodulowanym. W przypadku demodulacji FM, dyskryminator ten jest poprzedzony ogranicznikiem dla wyeliminowania zmian amplitudy będących skutkiem szumów i dlatego następuje polepszenie stosunku sygnał-szum S/N na wyjściu odbiornika.

4.3 ZWIELOKROTNIANIE Z PODZIAŁEM CZĘSTOTLIWOŚCIOWYM

Zwielokrotnianie z podziałem częstotliwościowym (FDM) jest procesem łączącym pewną liczbę źródeł sygnału lub kanałów w jeden złożony sygnał. Polega ono na modulowaniu każdym z sygnałów innej częstotliwości nośnej tak dobranej, aby widma otrzymanych w ten sposób sygnałów zmodulowanych nie zachodziły na siebie. Tym sposobem całe dostępne pasmo zostaje podzielone na pewną liczbę oddzielnych pasm częstotliwości, z których każde mieści jeden sygnał i stąd termin „podział częstotliwościowy”.



Rys. 4.20 System telefonii nośnej FDM

Klasycznym przykładem zastosowania FDM jest linia telekomunikacyjna zwana **systemem telekomunikacji nośnej**. Systemy tego typu są najprostszym rodzajem systemów wielokanałowych i pozwalają na przesyłanie do 60 kanałów telefonicznych za pomocą konwencjonalnych par przewodów miedzianych. Sygnały dzieli się tu na dwie grupy w zależności od kierunku transmisji (tam i z powrotem) i każdej z nich przypisana zostaje oddzielna para przewodów. To pozwala na zastosowanie wzmacniaczy, będących z natury urządzeniami jednokierunkowymi, które umożliwiają działanie długodystansowych łączy telefonicznych stosowanych w telefonii międzymiastowej.

Na rysunku 4.20 pokazano tworzenie podstawowej grupy FDM zajmującej pasmo częstotliwości $12 \div 60$ KHz. Każdy kanał zawiera modulator i filtr wytwarzający sygnał SSB. Poszczególne kanały mają pasmo o szerokości 4 KHz. Sygnały telefoniczne zajmują tylko pasmo $300 \div 3400$ Hz i dlatego każdy z kanałów ma w praktyce **pasmo ochronne** zabezpieczające przed interferencją między sąsiednimi kanałami.

Filtry kanałowe są umieszczone po każdym modulatorze i służą także do ochrony przed interferencją pomiędzy kanałami, zanim zostaną one dodane do siebie i podane na wejście **modulatora grupowego**. Stosuje się tu filtry kwarcowe, gdyż wykazują one dużą selektywność. Aby otrzymywane charakterystyki były jeszcze bardziej selektywne, grupa tworzona jest początkowo w zakresie częstotliwości $60 \div 108$ KHz. Filtry kanałowe są tak zaprojektowane, iż wybierana jest dolna wstęga boczna każdego z kanałów. O dolnej wstędze bocznej mówimy, że jest **odwrócona**, gdyż najwyższe częstotliwości sygnału informacyjnego pojawiają się w niej jako najniższe częstotliwości sygnału zmodulowanego i vice versa. Wszystkie te częstotliwości zostają następnie zmienione, czyli **przesunięte** przez modulator grupowy o częstotliwości nośnej 120 KHz. Przez wybranie dolnych wstęg bocznych uzyskuje się pożądaný zakres częstotliwości $12 \div 60$ KHz. Wstęga boczna każdego kanału w obrębie grupy jest jak mówimy **wyprostowana** (ang. *erect*, przyp. tłum.); jest bowiem prosta odpowiedniość pomiędzy wysokimi a niskimi częstotliwościami przed i po modulacji.

Analogiczny zestaw aparatury stosuje się dla powrotnego kierunku transmisji. Obejmuje on kolejno demodulator grupowy przenoszący odbierane sygnały z powrotem na pasmo $60 \div 108$ KHz oraz demodulator kanałowy. System można jeszcze bardziej rozwinąć. Pięć grup 12-kanałowych można jeszcze raz zmodulować, tworząc sygnał FDM o 60. kanałach, ciągle jeszcze nadający się do konwencjonalnej transmisji kablowej. Dalsze zwielokrotnianie prowadzi do systemów pracujących w zakresie megahercowym i wymaga już kabli o mniejszych stratach, jakimi są współosiowe linie transmisyjne.

Wiele systemów nośnych wyparły cyfrowe systemy wielokrotne, o których powiemy w rozdziale 5. Omówiony przykład posłużył nam do zademonstrowania koncepcji systemu FDM. Jest ona bardzo ważna dla telekomunikacji, gdyż ukazuje, jak w systemach o bardzo dużej liczbie kanałów wykorzystuje się transmisję radiową, bez zachodzenia na siebie widm poszczególnych kanałów i bez interferencji. Do typowych zastosowań można zaliczyć transmisję sygnałów telewizyjnych, telefonię komórkową oraz naziemne i satelitarne mikrofalowe łącza radiowe.

4.4 PORÓWNANIE METOD MODULACJI

Dwa najważniejsze parametry używane dla porównywania różnych typów modulacji to szerokość pasma i stosunek S/N . Stosunek S/N liczony jest zarówno na wejściu jak na wyjściu odbiornika. Ponieważ już rozpatrywaliśmy szerokości pasma poszczególnych rodzajów sygnałów modulowanych, zajmiemy się teraz z kolei stosunkiem S/N , po czym podsumujemy nasze rozważania.

4.4.1 Efekt progowy

Zanim porównamy poszczególne typy modulacji, weźmy pod uwagę wpływ szumu na sygnał AM. Dla szumu przyjmujemy następującą reprezentację:

$$n(t) \cos[\omega_c t + \phi(t)]$$

Równanie (4.4) reprezentujące sygnał AM zapiszemy w postaci:

$$[U_c + m(t)] \sin \omega_c t \quad (4.63)$$

przy czym:

$$m(t) = U_m \sin \omega_m t \quad (4.64)$$

Sygnał odbierany na wejściu demodulatora jest postaci:

$$g(t) = [U_c + m(t)] \cos \omega_c t + n(t) \cos[\omega_c t + \phi(t)] \quad (4.65)$$

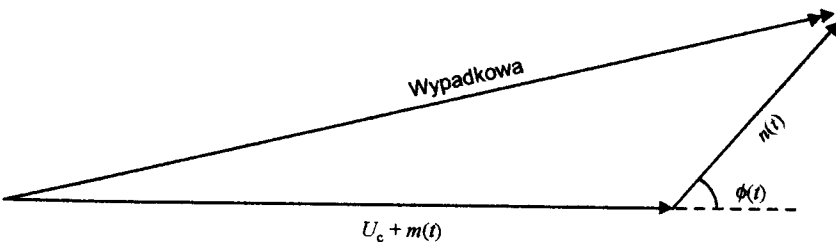
Statyczny wykres wskazowy dla równania (4.65) pokazano na rys. 4.21.

Gdy $[U_c + m(t)]$ i $n(t)$, S/N może być uważany jako duży i Betts⁴⁾ pokazał, że sygnał na wyjściu detektora obwiedni, U_{wy} ma przybliżoną postać:

$$U_{wy} = \text{sygnał} + \text{szum} \approx [U_c + m(t)] + n(t) \cos \phi(t) \quad (4.66)$$

Rozpatrzmy teraz sytuację, gdy S/N jest niewielki przy warunku $n(t) \ll [U_c + m(t)]$. Z równania (4.65) otrzymujemy wówczas sygnał:

$$u_{wy} = \text{szum} + \text{sygnał} \cdot \text{szum} \approx [n(t) + U_c \cos \phi(t)] + m(t) \cos \phi(t) \quad (4.67)$$

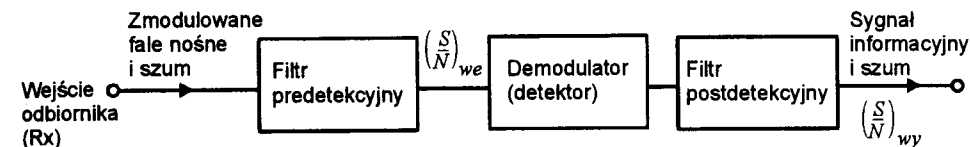


Rys. 4.21 Sygnał AM w obecności szumów

Porównując równania (4.66) i (4.67) stwierdzamy, iż na wyjściu detektora pojawia się składowa szumowa – addytywna gdy S/N jest duży oraz multiplikatywna, gdy S/N jest mały. Wpływ mnożenia sygnału przez składową szumową $\cos \phi(t)$ będzie miał oczywiście znacznie większy wpływ na sygnał wyjściowy, niż sama składowa addytywna, będąca ponadto wówczas niewielka. Przejście pomiędzy efektem addytywnym, a efektem multiplikatywnym zachodzi przy przekroczeniu pewnego poziomu progowego. Dokładna wartość stosunku S/N , przy którym pojawia się ten **efekt progowy** jest nieokreślona i można ją wyznaczyć jedynie sposobem doświadczalnym. Szum multiplikatywny pojawiający się przy małym stosunku S/N występuje we wszystkich detektorach niekoherentnych, takich jak demodulatory pełnej fali AM i demodulatory kąta.

4.4.2 Porównanie procesów demodulacji

Na rysunku 4.22 pokazano ogólny schemat blokowy odbiornika. Filtr predetekcyjny, typowy dla stopni pośredniej częstotliwości (IF) odbiorników radiowych, ogranicza pasmo odbieranego sygnału do szerokości zajmowanej przez sygnał modulowany. Zapobiega to przedostawaniu się szumu z poza pasma na wyjście demodulatora. $(S/N)_{we}$



Rys. 4.22 Ogólny schemat blokowy odbiornika

jest tu po prostu równy S/N przed demodulacją. Filtr podetekcyjny może być wymagany lub nie, w zależności od typu procesu demodulacji. Służy on wówczas dla eliminacji składowych o częstotliwościach wyższych od zawartych w widmie odtwarzanego sygnału informacyjnego. $(S/N)_{wy}$ odzwierciedla odzyskany sygnał informacyjny oraz związane z nim szumy.

Transmisja w pasmie podstawowym

Określimy teraz stosunek $(S/N)_{wy}$ dla różnych rodzajów demodulacji. Będziemy przy tym zakładać, iż sygnał informacyjny ma pasmo W Hz i że system transmisyjny wprowadza jedynie szum gaussowski o dwustronnej funkcji widmowej gęstości mocy (PSD) o amplitudzie $\eta/2$, jak pokazano uprzednio na rys. 3.4b.

Zacznijmy od stosunku $(S/N)_{wy}$ dla transmisji w pasmie podstawowym, z którą porównamy później systemy z modulacją. Szerokość pasma systemu jest taka jak pasmo sygnału informacyjnego W . Dlatego możemy napisać:

$$(S/N)_{we} = \frac{S_R}{\frac{\eta}{2} \cdot 2W} \quad (4.68)$$

$$= \frac{S_R}{\eta W} \quad (4.69)$$

⁴⁾ Betts, J.A., *Signal processing, Modulation and Noise*, The English University Press Ltd, 1970, ss. 98, 99. ISBN 0-340-09895-3.

gdzie S_R – moc sygnału na wejściu odbiornika. W przypadku transmisji w pasmie podstawowym nie ma stopnia detektora i zachodzą równości:

$$(S/N)_{wy} = (S/N)_{we} \quad (4.70)$$

$$(S/N)_{wy} = \frac{S_R}{\eta W} \quad (4.71)$$

Stosunek $(S/N)_{wy}$ został wykreślony w funkcji $(S/N)_{we}$ na rys. 4.23.

Pełna modulacja AM: detekcja koherentna i detekcja obwiedni

Pełna modulacja AM ma systemową szerokość pasma $2W$. W przypadku detekcji koherentnej i detekcji obwiedni powyżej progu, co oznacza iż $(S/N)_{wy}$ wynosi przynajmniej 10 dB, zgodnie z rys. 4.22 zachodzą równości:

$$(S/N)_{wy} = \frac{S_R}{2\eta W} \quad (4.72)$$

$$(S/N)_{we} = \frac{S_R}{\eta W} \quad (4.73)$$

Zatem stosunek (S/N) po detekcji jest dwa razy większy niż na wejściu odbiornika, co oznacza polepszenie tego stosunku o 3 dB w procesie detekcji. Wartość stosunku $(S/N)_{wy}$ jest taka sama, jak w przypadku transmisji w pasmie podstawowym. Sygnał na wejściu demodulatora zawiera falę nośną, pojawiającą się na wyjściu demodulatora jako składowa stała równa wartości szczytowej niezmodulowanej fali nośnej. Składowa ta nie ma związku z oryginalnym sygnałem informacyjnym i jej moc należy pominąć. W rezultacie, mierząc moc S_{wy} nie uwzględniamy składowej stałej i dlatego $(S/N)_{wy}$ okazuje się w praktyce o 7 ÷ 10 dB gorszy od wynikającego z równania (4.73). Uwzględniając ten fakt, zmodyfikowana wartość $(S/N)_{wy}$ dla pełnej modulacji AM została pokazana na rys. 4.23, gdzie poprawka w stosunku do transmisji w pasmie podstawowym wynosi 10 dB.

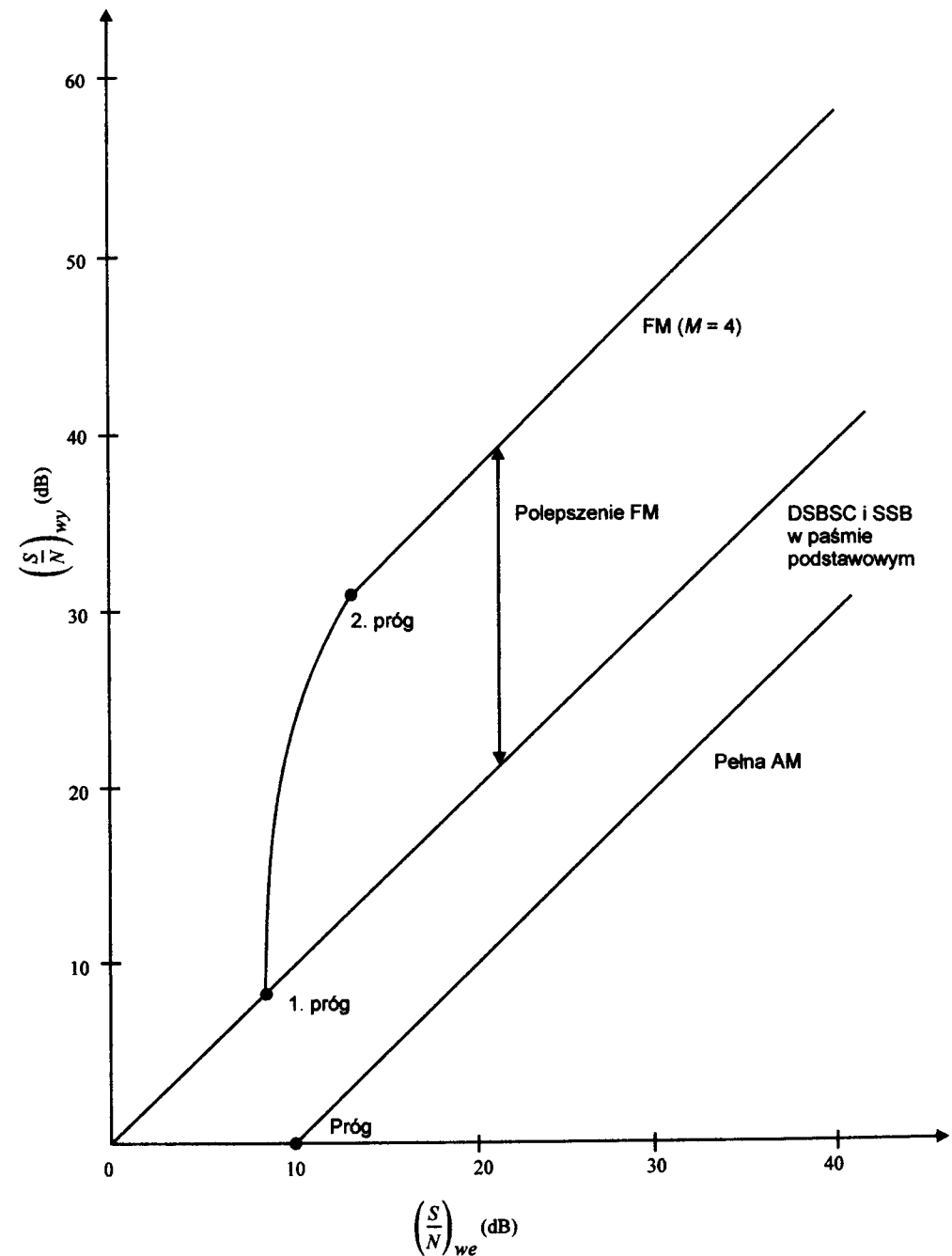
DSBSC

Analiza systemu DSBSC jest podobna jak dla pełnej modulacji AM, gdyż oba systemy mają tę samą szerokość pasma:

$$(S/N)_{wy} = \frac{S_R}{2\eta W} \quad (4.74)$$

$$(S/N)_{wy} = \frac{S_R}{\eta W} \quad (4.75)$$

Z tego względu, jak przy pełnej modulacji AM, występuje polepszenie stosunku S/N podczas detekcji o 3 dB. Wartość $(S/N)_{wy}$ jest taka sama jak dla transmisji z pasma podstawowego i została też uwzględniona na rys. 4.23.



Rys. 4.23 Porównanie różnych typów modulacji

Z analizy systemu SSB widać, że:

$$(S/N)_{we} = \frac{S_R}{\eta W} \quad (4.76)$$

$$(S/N)_{wy} = \frac{S_R}{\eta W} \quad (4.77)$$

Nie ma tu polepszenia stosunku S/N w trakcie procesu demodulacji, choć dla transmisji wymagana jest jedynie połowa pasma niezbędnego w uprzednio podanych dwu systemach AM. Wartość $(S/N)_{wy}$ jest znów taka sama jak dla transmisji z pasma podstawowego i została także podana na rys. 4.23.

Modulacja częstotliwości

Odbiornik FM tym różni się od pokazanego na ogólnym schemacie blokowym z rys. 4.22, że ogranicznik jest umieszczony pomiędzy filtrem predetekcyjnym a detektorem. W systemach FM i PM, inaczej niż przy AM i wąskopasmowej wersji FM, szerokość pasma filtru predetekcyjnego jest większa od podwojonej szerokości pasma filtru podetekcyjnego, by móc zmieścić istotne składowe sygnału. W wyniku tego mamy większą niż w innych systemach moc szumów na wejściu demodulatora.

Analiza procesu demodulacji sygnału FM jest złożona i nie mieści się w ramach tego rozdziału. Dla uproszczenia przeprowadza się ją zwykle dla modulacji pojedynczym tonem sinusoidalnym. Wyniki poszczególnych analiz różnią się nieco, w zależności od poczynionych założeń początkowych. Analiza dokonana przez Schwartza⁵⁾ pokazuje, że dla FM:

$$(S/N)_{wy} = 3M^3(S/N)_{we} \quad (4.78)$$

Oznacza to, iż $(S/N)_{wy}$ jest $3M^2$ razy większy, niż dla koherentnej demodulacji AM. W przypadku szerokopasmowej modulacji FM, gdy $M > 1$, $(S/N)_{wy}$ jest znacznie większe niż przy AM, a zwiększenie to jest znane jako **współczynnik poprawy FM**. Na rysunku 4.23 pokazano, że dla M równego 4, jak podaje Schwartz, $(S/N)_{wy}$ polepsza się o 13 dB. System FM wykazuje jednak efekt progowy. Z pierwszym progiem mamy do czynienia gdy współczynnik poprawy spada do wartości, przy której S/N dla FM i AM stają się takie same. Drugi próg pojawia się, gdy osiągnięta zostaje pełna poprawa dla systemu FM. Oba te progi są funkcjami M . Gdy M ulega redukcji, pasmo zajmowane przez sygnał zmodulowany a stąd i moc szumów zmniejsza się, a więc można bardziej zmniejszyć moc odbieranego sygnału, zanim pojawi się efekt progowy. Ten sam współczynnik poprawy można więc w systemie FM uzyskać przy mniejszym stosunku $(S/N)_{we}$, gdy wskaźnik M jest mniejszy.

Regułę Carsona można zapisać w postaci:

$$B_T = 2f_m(1 + M) \quad (4.79)$$

gdzie szerokość pasma transmitowanego sygnału FM, czyli **szerokość pasma transmisji** oznaczono przez B_T . Dla szerokopasmowej modulacji FM, gdy M jest dużo większe od 1, wzór (4.79) można aproksymować wyrażeniem:

$$B_T \approx 2Mf_m \quad (4.80)$$

Wyznaczając M ze wzoru (4.80) i podstawiając do (4.78) uzyskujemy wzór:

$$(S/N)_{wy} \approx 3 \left(\frac{B_T}{2f_m} \right)^2 (S/N)_{we} \quad (4.81)$$

Ze wzoru (4.81) widać, że polepszenie stosunku S/N dla systemu FM jest w przybliżeniu proporcjonalne do kwadratu szerokości pasma transmisji. FM jest przykładem systemu z **rozszerzaniem szerokości pasma**, w którym za cenę powiększenia szerokości pasma można uzyskać lepszy stosunek sygnał-szum.

Równość (4.78) sugeruje, że jeśli powiększać M do nieskończoności, w systemie FM będzie ciągle następować polepszenie stosunku S/N na wyjściu odbiornika. Gdy moc nadawana pozostaje stała przy wzroście M (a więc i szerokości pasma), amplituda mocy odbieranej S_R maleje. Jednocześnie moc szumów $\eta/2$ na wejściu pozostaje stała dla wszystkich częstotliwości. Dlatego wraz ze spadkiem S_R maleje też stosunek $(S/N)_{we}$ na wejściu demodulatora. W końcu staje się on na tyle mały, że pojawia się efekt progowy i stosunek sygnał-szum na wyjściu $(S/N)_{wy}$ gwałtownie maleje.

Opisane rozumowanie dotyczy szerokopasmowego sygnału FM, gdzie przyjęto jak zwykle $M \geq 0,6$. Dla M równego 0,6 ze wzoru (4.78) wynika, że współczynnik poprawy FM dla wąskiego pasma jest, w porównaniu z detekcją koherentną, równy lub mniejszy od 0,3 dB. Poprawa jest więc, jak należało oczekiwać pomijalna, gdyż szerokość pasma wąskopasmowego sygnału FM jest prawie taka sama jak dla sygnału AM.

Tabela 4.1 PORÓWNANIE RÓŻNYCH TECHNIK MODULACJI

Typ modulacji	Pasmo	Efekt progowy	Polepszenie S/N (wzgl. DSBSC)	Odbiór	Uwagi
Pełna AM	2W	Tak	-7 do -10 dB	Detektor obwiedni lub kwadratowy	Prosta i tania. Transmisja fali nośnej powoduje straty mocy. Zastosowanie – radiofonia
DSBSC	2W	Nie	Nie	Koherentny	Wymaga detekcji synchronicznej. SSB preferowane ze względu na węższe pasmo
SSB	W	Nie	Nie	Koherentny	Detekcja synchroniczna. Efektywna widmowo. Szeroko używana w telefonii
FM	$\gg W$	Tak (polepszenie > 10 dB)	Tak	Dyskryminator częstotliwości	System ze zwiększaniem szerokości pasma. Lepszy S/N . Stosowana w mikrofalowej komunikacji naziemnej i satelitarnej
PM	$\gg W$	Tak	Tak	Nieliniowy	Jakość podobna jak FM. Bardziej złożony odbiór

⁵⁾ Schwartz, M., *Information Transmission, Modulation and Noise*, wyd. 4, McGraw-Hill, ss. 510 ÷ 517. ISBN 0-07-100931-0.

4.4.3 Porównanie systemów modulacji

Rysunek 4.23 i tablica 4.1 zawierają użyteczne porównanie różnych metod modulacji. Zastosowanie danej metody modulacji dla konkretnego systemu zależy od kryteriów przyjętych w tym systemie. Jeśli dla przykładu za główną zaletę przyjmiemy małą szerokość pasma, to najbardziej atrakcyjną okaże się modulacja SSB. Pełna modulacja AM oferuje z kolei najtańsze odbiorniki z detekcją obwiedni. Jest to szczególnie atrakcyjne przy produkcji wielkoseryjnej, jak w przypadku odbiorników radiowych i telewizyjnych (*tor wizji*, przyp. tłum.) powszechnego użytku. Najlepszą jakość odbioru daje modulacja FM, co osiąga się jednak kosztem znacznego rozszerzenia pasma. Warto podkreślić, iż w środowiskach o niskim stosunku S/N współczynnik poprawy FM maleje i jej zalety w porównaniu z AM ulegają zniwelowaniu.

4.5 PODSUMOWANIE

Modulacja jest procesem nakładania informacji na inny przebieg o wyższej częstotliwości, zwany falą nośną. Proces ten jest stosowany do przenoszenia sygnałów o stosunkowo niskich częstotliwościach w kierunku częstotliwości na tyle wysokich, aby można je było transmitować drogą radiową lub światłowodową. Modulacji podlegać może albo amplituda fali nośnej (AM), albo jej częstotliwość kątowna (modulacja PM lub FM). Podstawowym parametrem modulacji AM jest głębokość modulacji, od której zależy kształt obwiedni przebiegu zmodulowanego oraz stopień odporności na szumy i podział mocy między falę nośną i wstęgi boczne. Modulację AM można uzyskać w sposób nieliniowy lub liniowy. Wytwarzanie nieliniowe polega na świadomym wykorzystaniu nieliniowej charakterystyki elementu aktywnego i prowadzi do zniekształceń harmonicznych. Przy modulacji liniowej unika się tego typu operacji, uzyskując mniej zniekształcony przebieg zmodulowany. Detektor diodowy umożliwia tanią i efektywną demodulację sygnału AM. Wybór wartości elementów tego detektora jest istotny ze względu na minimalizację zjawiska przylegania do ujemnego szczytu, będącego formą zniekształceń odzyskiwanego sygnału informacyjnego. Modulacja DSBSC jest uzyskiwana za pomocą modulatora zrównoważonego, w którym przebieg nośny i sygnał modulujący są bezpośrednio mnożone przez siebie. Brak fali nośnej charakteryzujący modulację DSBSC pozwala na zmniejszenie mocy nadawanej. Modulacja ta wymaga jednak detekcji koherentnej co oznacza konieczność odzyskiwania w odbiorniku fali nośnej, niezbędnej w procesie demodulacji.

Do powszechnie stosowanych układów modulatora zrównoważonego należą: modulator Cowana i modulator pierścieniowy. Detekcja koherentna wymagana jest też w przypadku modulacji SSB, której dodatkową zaletą jest mniejsza szerokość pasma. Matematyczna analiza widma sygnału FM ujawnia jego nieskończony charakter. Tablice funkcji Bessela i znajomość wskaźnika modulacji pozwalają na określenie liczby istotnych składowych widma, a zarazem praktycznie zajmowanej szerokości pasma tego sygnału. Reguła Carsona pozwala także oszacować przybliżoną szerokość pasma tego sygnału. Wąskopasmowa modulacja FM stanowi kompromis pomiędzy AM i FM, gdzie staramy się uzyskać lepsze właściwości szumowe sygnału FM przy mniejszej szerokości pasma zbliżonej do tej, jaką zajmuje sygnał AM.

System FDM jest jednym z systemów wielokanałowych, pozwalających na przesyłanie dwu lub większej liczby sygnałów za pomocą pojedynczego łącza transmisyjnego. FDM stosuje się w systemach kablowych, metalicznych lub światłowodowych, w celu zwiększenia liczby transmitowanych sygnałów dla polepszenia właściwości technicznych i ekonomicznych systemu. W systemach radiokomunikacyjnych, gdzie też stosuje się system TDM, używa się go celem widmowego rozdzielenia kanałów dla uniknięcia interferencji wzajemnej. Efekt progowy odzwierciedla zjawisko nieznacznego addytywnego wpływu szumów na sygnał wyjściowy detektora przy dostatecznie dużym stosunku sygnał-szum. Gdy ten warunek nie jest spełniony, stosunek sygnał-szum na wyjściu detektora pogarsza się gwałtownie wraz ze spadkiem stosunku sygnał-szum na wejściu odbiornika.

Poszczególne metody modulacji zostały porównane pod względem właściwości szumowych z uwzględnieniem ich szerokości pasma. Sygnał FM wymaga znacznie szerszego pasma niż sygnał AM. Pełna modulacja AM wymaga ponadto większej mocy nadawanej przy zadanym stosunku sygnał-szum niż inne rodzaje modulacji. Jest to częściowo spowodowane "traconą" mocą fali nośnej. FM wykazuje lepszy stosunek sygnał-szum, wzrastający wraz ze wskaźnikiem modulacji. Wzrost tego wskaźnika prowadzi jednak do wzrostu szerokości pasma. Z tego względu system FM jest znany jako system z rozszerzaniem pasma.

Zadania

- 4.1. Wyjaśnić, znaczenie terminów: „modulacja amplitudy” i „modulacja kąta”. Jaka jest podstawowa różnica między tymi rodzajami modulacji?
- 4.2. Narysować w skali, na papierze kratkowanym, przebieg AM o amplitudzie fali nośnej 4 V i głębokości modulacji 0,35.
- 4.3. Sygnał AM ma głębokość modulacji 120%. Naszkicować przebieg modulowany, ilustrujący powstające zniekształcenia. Wyjaśnić co się stanie, gdy taki sygnał AM zostanie podany na wejście detektora diodowego.
- 4.4. Fala AM jest opisana wyrażeniem:

$$g(t) = 10(1 - \cos 6280t) \sin(6\pi 10^6 t - \pi/6) \text{ V}$$

Wyznaczyć:

- a) głębokość modulacji;
- b) częstotliwość modulującą;
- c) okres fali nośnej;
- d) szczytowe napięcie chwilowe;
- e) szerokość pasma sygnału zmodulowanego.

- 4.5. Obwiednia pełnej fali AM ma maksimum o wartości 4,5 V i minimum o wartości 2,3 V. Wyznaczyć głębokość modulacji.
- 4.6. Fala AM jest opisana wyrażeniem:

$$g(t) = 24(1 + 0,5 \cos 3140t) \sin 2\pi 10^5 t \text{ V}$$

Sygnał ten zostaje podany na wzmacniacz o oporze wejściowym 600 Ω . Wyznaczyć traconą moc.

- 4.7. Całkowita moc nadawana sygnału AM wynosi 10 kW. Wyznaczyć moce wstęp bocznych i fali nośnej przy głębokości modulacji 25%.
- 4.8. Fala nośna o częstotliwości 6 MHz została zmodulowana w amplitudzie przez sygnał o pasmie od 300 do 3400 Hz. Naszkicować widmo tego sygnału zmodulowanego.
- 4.9. Wyjaśnić co się dzieje z mocą fali nośnej w odbiorniku przy demodulacji sygnału AM.
- 4.10. Sygnał DSBSC można otrzymać przez podawanie sumy sygnału modulującego i nośnego na wejście układu nieliniowego. Sygnał wyjściowy tego układu zawiera składową DSBSC.
Przyjmując sumę sygnału modulującego i nośnego w postaci:
- $$g(t) = U_m \sin \omega_m t + U_c \sin \omega_c t$$
- oraz charakterystykę elementu nieliniowego:
- $$h(t) = k + aU_{we} + b(U_{we})^2$$
- wykażać, że jedna ze składowych napięcia wyjściowego $k(t)$ jest sygnałem DSBSC.
- 4.11. System FM ma maksymalną dewiację częstotliwości 100 KHz i częstotliwość modulującą 15 KHz.
- Wyznaczyć wskaźnik dewiacji;
 - Stosując regułę Carsona wyznaczyć przybliżoną szerokość pasma tego sygnału;
 - Wyznaczyć szerokość pasma tego sygnału za pomocą funkcji Bessela.
- 4.12. Wyjaśnić termin „efekt progowy”. Wyjaśnienie powinno zawierać odpowiednie wykresy.
- 4.13. Porównać systemy AM, DSBSC, SSB i FM pod względem szerokości pasma i stosunku S/N .
- 4.14. System FM jest czasem nazywany systemem z rozszerzaniem pasma. Wyjaśnić, sens tego określenia, biorąc pod uwagę polepszenie stosunku S/N w stosunku do modulacji AM.

Literatura

- Betts, J.A., *Signal Processing, Modulation and Noise*, The English Universities Press Ltd, 1970. ISBN 0-340-09895-3.
- Connor, F.R., *Modulation*, wyd. 2, Edward Arnold, 1982, ISBN 0-7131-3457-7.
- Schwartz, M., *Information Transmission, Modulation and Noise*, wyd. 4, McGraw-Hill, 1990, ISBN 0-07-100931-0.
- Stremler, F.G., *Introduction to Communications Systems*, wyd. 3, Addison-Wesley, 1990, ISBN 0-201-51651-0.
- Zeimlner, R.E., *Principles of Communications*, wyd. 4, John Wiley & Sons, 1995, ISBN 0-471-12496-6.

Transmisję sygnału cyfrowego przez kanał o ograniczonym pasmie przedstawiono z uwzględnieniem zjawiska interferencji międzysymbolowej. Pokazano sposób wykorzystania wykresu oczkowego do określania stopnia występującej interferencji międzysymbolowej. Korekcję, a w szczególności z wykorzystaniem kosinusoidalnej charakterystyki amplitudowej, zaprezentowano jako sposób zredukowania tej interferencji. Rozpatrzono wpływ szumów na bitową stopę błędów w odbiorniku. Zdefiniowano pojemność kanału pokazując tym samym, iż dla każdego praktycznego kanału istnieje granica szybkości transmisji danych przez ten kanał. Przedstawiono metodę zwielokrotniania z podziałem czasowym aby pokazać, jak do przesyłania zwielokrotnianych sygnałów cyfrowych można wykorzystywać wspólną drogę transmisji. Opisano system modulacji impulsowej. Zdefiniowano stosunek sygnału do szumu kwantowania. Szerokość pasma w systemie modulacji impulsowo-kodowej wyznaczono, a zastosowanie kompresji wyjaśniono. Przedstawiono też modulację cyfrową w systemach ASK, FSK, PSK i QAM. Rozpatrzono właściwości szumowe każdego z tych rodzajów modulacji, porównując ich bitowe stopy błędów przy zadanym stosunku sygnał-szum kanału. Rozdział kończy się porównaniem właściwości każdego z omówionych rodzajów modulacji.

5.1 TRANSMISJA W PASMIE PODSTAWOWYM

Sygnały mogą być przesyłane za pomocą przewodów metalowych, światłowodów lub drogą radiową. Choć we wszystkich trzech rodzajach kanałów jest stosowana modulacja, transmisja w pasmie podstawowym jest możliwa tylko w kanale przewodowym. W obecnym punkcie transmisja w pasmie podstawowym zostanie szczegółowo rozpatrzona.

5.1.1 Kanały o ograniczonym pasmie

Metalowa linia transmisyjna może być opisana za pomocą elektrycznego schematu zastępczego¹⁾ zawierającego szeregową indukcyjność i równoległą pojemność. Zgodnie z tym linia transmisyjna zachowuje się jak filtr dolnoprzepustowy, co powoduje tłumienie i zniekształcenia fazowe.

¹⁾ Dunlop, J., Smith, D.G., *Telecommunications Engineering*, wyd. 3, Chapman & Hall, 1994, s. 174. ISBN 0-412-56270-7.

Sygnały cyfrowe mają teoretycznie nieskończone widmo. Właściwości filtracyjne o charakterze dolnoprzepustowym cechujące linie przesyłowe, a także każdy inny kanał, nie wykluczają automatycznie możliwości doskonałego odtworzenia sygnału cyfrowego w odbiorniku. Szybkość symbolowa R podawana w bodach jest równa odwrotności czasu trwania najkrótszego elementu przesyłanego sygnału. Idealna rekonstrukcja tego sygnału jest możliwa przy założeniu, że szybkość transmisji nie przekracza podwojonej szerokości pasma. Szybkość ta jest nazywana **szybkością Nyquista**²⁾:

$$R = \frac{1}{T} = 2W \quad (5.1)$$

gdzie T – czas trwania jednego elementu sygnałowego, zwanego **symbolem**. Granica Nyquista może też być interpretowana jako warunek przesyłania maksimum dwu symboli na herc szerokości pasma. Istnieje tu analogia do próbkowania opisanego w rozdziale 2., gdzie pokazano, że liczba próbek jaka może zostać przesłana na herc szerokości pasma wynosi też dwie. Zbyt duża częstotliwość próbkowania powoduje zjawisko aliasingu. Gdy sygnał cyfrowy jest przesyłany powyżej szybkości Nyquista, aliasing pojawi się także w odbiorniku.

Analiza praktycznego wpływu zjawiska filtracji dolnoprzepustowej w linii przesyłowej na ciąg impulsów wymaga dokładnej znajomości transmitancji linii. Weźmy

pod uwagę wpływ filtru idealnego na ciąg impulsów, przy czym charakterystyka częstotliwościowa linii ma postać jak na rys. 5.1a. Będziemy zakładać, że szybkość transmisji jest dokładnie równa podwojonej szerokości pasma przepustowego filtru, a mianowicie:

$$\frac{1}{T} = 2W \quad (5.2)$$

lub:

$$T = \frac{1}{2} W \quad (5.3)$$

Wynik takiej filtracji jest splotem odpowiedzi czasowej filtru i sygnału cyfrowego. Na podstawie tablic transformat Fouriera z dodatku C możemy wyznaczyć odpowiedź filtru, biorąc odwrotną transformatę Fouriera impulsu prostokątnego przeskalowanego w częstotliwości o czynnik W :

$$H(f/2W) \Rightarrow \frac{1}{2} h(t/2W) \quad (5.4)$$

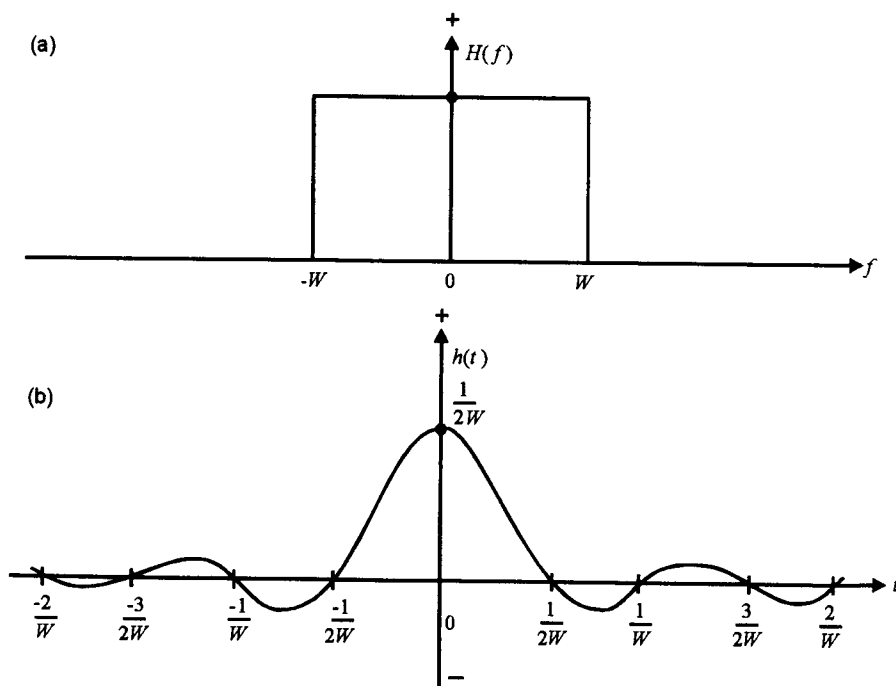
Zatem:

$$\text{rect}(f/2W) \Rightarrow \text{Sa}(2Wt) \quad (5.5)$$

Odpowiedź $h(t)$ idealnego filtru dolnoprzepustowego przedstawiono na rys. 5.1b.

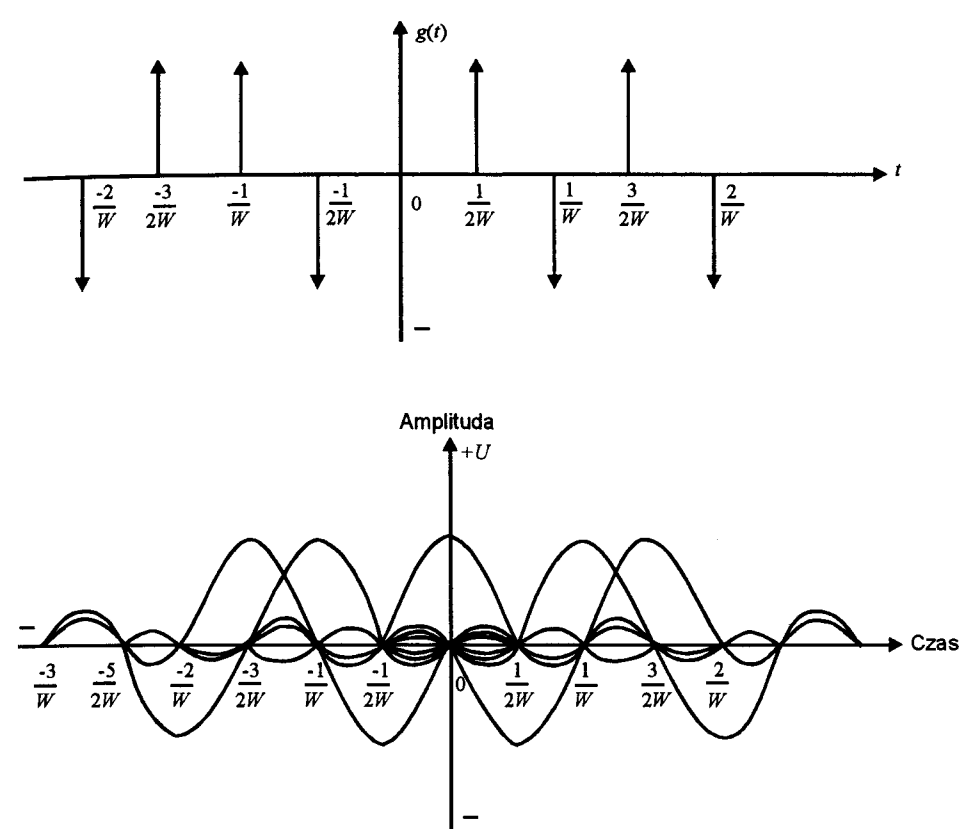
Wyznaczenie splotu sygnału cyfrowego składającego się z impulsów oraz podanej wyżej funkcji Sa nie jest zagadnieniem trywialnym. Dla prostoty będziemy przyjmować, iż każdy impuls ma kształt delta-funkcji i że sygnał jest bipolarny. Sygnał ten pokazano na rys. 5.2a.

Splot pojedynczej delta-funkcji z odpowiedzią impulsową filtru o kształcie funkcji Sa z rys. 5.1b jest też funkcją Sa , lecz ześrodkowaną wokół chwili czasu, w której pojawia się dana funkcja delta. Stosując zasadę superpozycji otrzymujemy całkowitą odpowiedź filtru w postaci sumy odpowiedzi cząstkowych na każdy pojedynczy impuls delta. Podsumowując możemy stwierdzić, iż całkowita odpowiedź filtru na ciąg delta-funkcji z rys. 5.2a jest sumą szeregu funkcji Sa , skupionych wokół czasów występowania poszczególnych funkcji impulsowych. Wszystkie te funkcje, po jednej dla każdego impulsu, pokazano na rys. 5.2b. Na rysunku nie pokazano całkowitego napięcia wyjściowego będącego sumą ciągu przesuniętych w czasie funkcji Sa . Na podstawie pokazanej odpowiedzi kanału idealnego wnioskujemy, że w momentach próbkowania (równych $1/2W$ lub jej wielokrotności) amplituda osiąga wartości szczytowe związane jedynie z odpowiedzią na dany impuls wejściowy linii. Po drugie, amplitudy wszystkich innych impulsów Sa , dla momentów próbkowania innych niż „własny” są równe zero. Zegar odbiornika musi być idealnie zsynchronizowany tak, aby decyzja odnośnie amplitudy sygnału była podejmowana w odpowiednim przedziale czasu. Przy spełnieniu tego warunku jedynym napięciem jest to, jakie odpowiada właśnie odebranemu symbolowi i w tym przypadku inne impulsy nie wpływają na wynik. Warunek ten oznacza, iż nie występuje **interferencja międzysymbolowa (ISI)**.



Rys. 5.1 Odpowiedź czasowa idealnego filtru dolnoprzepustowego (a), jako odwrotna transformata Fouriera (b)

²⁾ Nyquist, H., *Certain topics in telegraph transmission theory*, AIEE Trans., T. 47, 1928, ss. 617 ÷ 644.



Rys. 5.2 Przebieg sygnału cyfrowego przez idealny filtr dolnoprzepustowy: a – sygnał wejściowy; b – odpowiedź filtru

Analiza ujawniła, iż nawet gdy kanał ma ograniczone pasmo, każdy symbol może zostać prawidłowo odebrany. W praktyce sygnały cyfrowe są szersze od impulsów delta, co prowadzi do zamazywania się odbieranego sygnału. Po drugie, charakterystyka kanału nie jest idealna, co wprowadza zniekształcenia, z których najistotniejsze są zniekształcenia fazowe. Po trzecie, synchronizacja zegarowa, a więc i decyzyjna odbieranego sygnału podlega naruszeniu, znanemu pod nazwą „drżenia fazy” czyli **jittera**. Podane trzy zjawiska wprowadzają ISI, która w krańcowych przypadkach może całkowicie zmienić sens lub znaczenie odebranego symbolu w momencie decyzji, do której odnosi się błąd.

W rozdziale 4 dyskutowaliśmy wymagania odnośnie częstotliwości i fazy fali nośnej w odbiorniku, dotyczące detekcji koherentnej. Takie same wymagania dotyczą zegara odbiornika. W przypadku sygnału z rys. 5.2b, gdy częstotliwość zegara nie będzie zsynchronizowana z częstotliwością sygnału odbieranego, następuje zanik synchronizacji procesu decyzyjnego. Jeśli nawet częstotliwość zegara jest prawidłowa, aby zapewnić optymalności procesu decyzyjnego, właściwa powinna być też jego faza. Oznacza to, iż napięcia wszystkich innych symboli opisane funkcjami Sa muszą w momencie podejmowania decyzji przechodzić przez zero. Są zasadniczo dwie metody uzyskiwania

synchronizacji zegarów nadajnika i odbiornika. Jedną z nich polega na przesyłaniu sygnału zegarowego do odbiornika za pomocą oddzielnego kanału. Częściej jednak poprzez odpowiednie kodowanie sygnału cyfrowego przed jego nadaniem uzyskuje się silną składową widma na częstotliwości zegara lub jej wielokrotności. Specjalny układ w odbiorniku odtwarza przebieg zegarowy zawarty w przychodzącym sygnale cyfrowym. Zagadnienie sposobu odzyskiwania sygnału zegarowego nie mieści się w zakresie tej książki. Duck i in.³⁾ podają cały szereg znanych metod kodowania i odzyskiwania sygnału zegarowego.

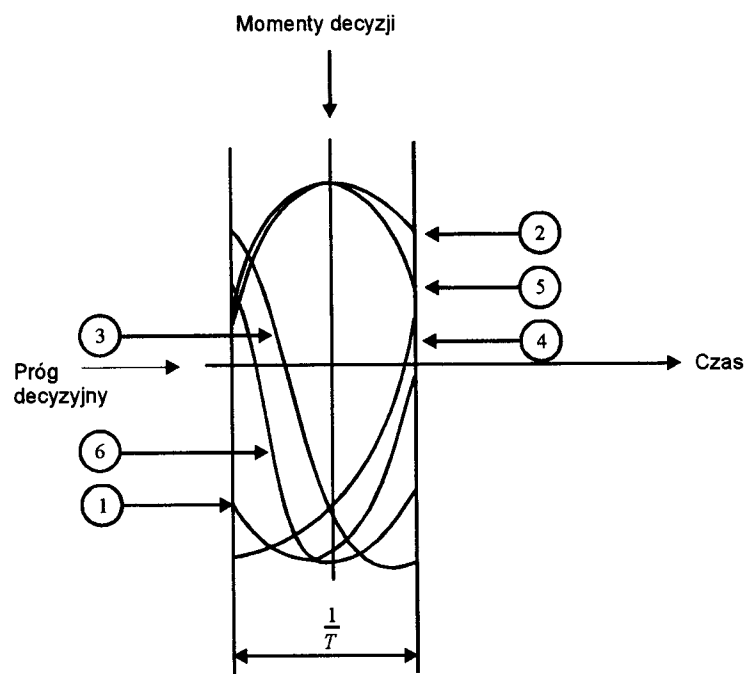
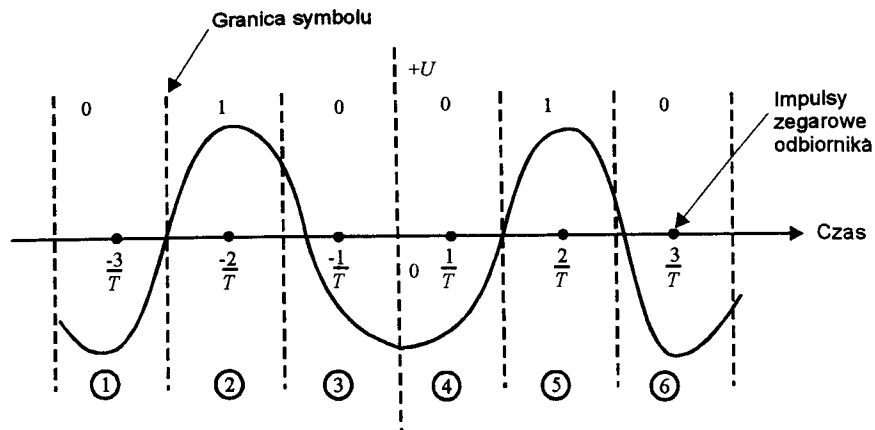
Linia przesyłowa, choć ma właściwości filtru dolnoprzepustowego, nie wykazuje w praktyce tak ostrego efektu odcięcia, jak charakterystyka rozpatrywanego idealnego filtru dolnoprzepustowego. Typowy sygnał cyfrowy ma w praktyce kształt podobny do pokazanego na rys. 5.3a. Odbiornik powinien mieć określony próg decyzyjny. W przypadku sygnału dwupoziomowego (binarnego) próg ten leży po prostu w połowie maksymalnego zakresu napięcia sygnału odbieranego lub w połowie wartości międzyszczytowej. Odbiornik powinien także zapewniać niezawodne określanie momentów próbkowania sygnału, zwane **synchronizacją decyzyjną**. Sygnał ten z kolei musi być jak najdokładniej zsynchronizowany z zegarem nadajnika.

Użyteczny test stosowany w praktyce do monitorowania wpływu łącza transmisyjnego w obecności szumów i zakłóceń polega na obserwacji **wykresu oczkowego**. Weźmy zatem ponownie pod uwagę sygnał odbierany jak na rys. 5.3a. Gdy oscyloskop zostanie zsynchronizowany z szybkością przesyłania symboli tak, iż jeden ślad wyświetla dokładnie jeden symbol, kolejne ślady nakładają się na siebie, jak pokazano na rys. 5.3b. Dla ułatwienia, symbole z rys. 5.3a kolejno ponumerowano. Ich ślady pokazano na wykresie oczkowym z rys. 5.3b. Dokładna liczba widocznych śladów będzie zależała od bezwładności ekranu lampy oscyloskopu.

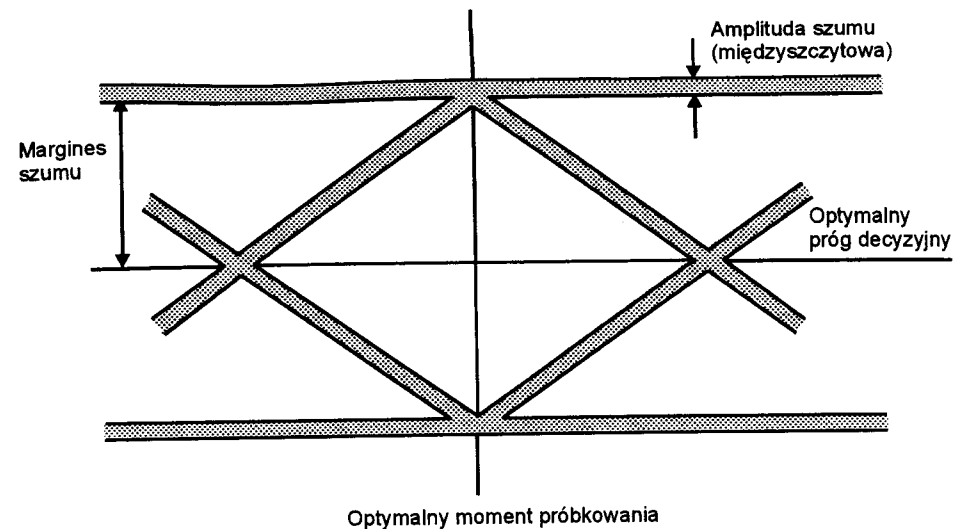
Obraz pokazany na rys. 5.3.b przypomina z wyglądu oko i stąd jego nazwa. Odbiornik pobiera próbki odbieranego sygnału okresowo w momentach czasu odpowiadającym środkom każdego z symboli, co daje kształt podobny do oka. Są to właśnie momenty decyzji. Dla sygnału binarnego próg decyzyjny jest ustawiony w połowie między dodatnim a ujemnym szczytem napięcia sygnału odbieranego. Napięcie, które w momencie decyzji jest większe od poziomu progowego, zostaje zakwalifikowane jako binarne 1 i vice versa. Na wykresie oczkowym pokazano, że amplitudy sygnału w poszczególnych momentach decyzji są różne. Wskazuje to na obecność interferencji międzysymbolowej (ISI), spowodowanej zniekształceniami, szumami, zakłóceniami oraz ograniczonym pasmem kanału.

Na rysunku 5.4 pokazano uogólniony wykres oczkowy. Rozmyte paski są liniami związanymi z sygnałem i jego zmianami spowodowanymi przez szumy, jak to było już pokazane na rys. 5.3. Szumy powodują zwiększenie szerokości pasków, co powoduje z kolei zmniejszenie obszarów oczek. Wykres oczkowy pozwala określić stopień odporności systemu na szumy, czyli margines szumów. Jest to wielkość, o jaką

³⁾ Duck, M., Bishop, P., Read, R., *Data Communications for Engineers*, Addison-Wesley, 1996, ss. 57 ÷ 72. ISBN 0-201-42788-5.



Rys. 5.3 Wykres oczkowy: a – typowy odbierany sygnał cyfrowy; b – wykres oczkowy dla odbiornika. Liczby w kółkach oznaczają numery symboli



Rys. 5.4 Uogólniony wykres oczkowy

tolerancja na jitter szybko maleje, w miarę jak moment decyzji odchyła się od pozycji optymalnej. Nachylenie oczka pokazuje więc tolerancję na błędy synchronizacji lub jitter, bądź jej brak.

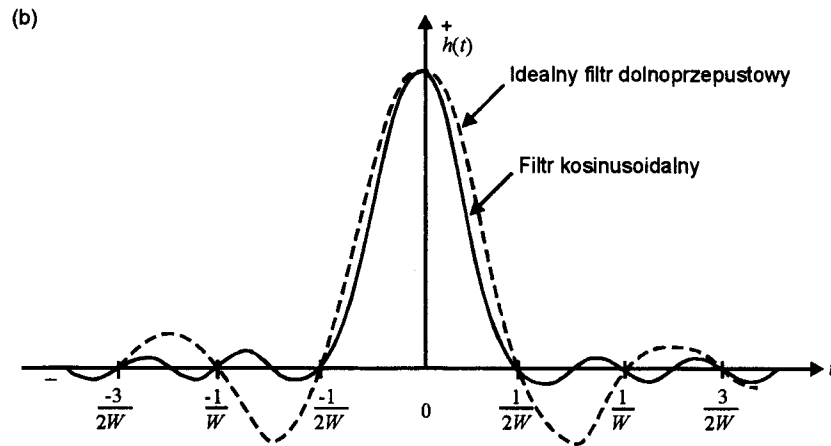
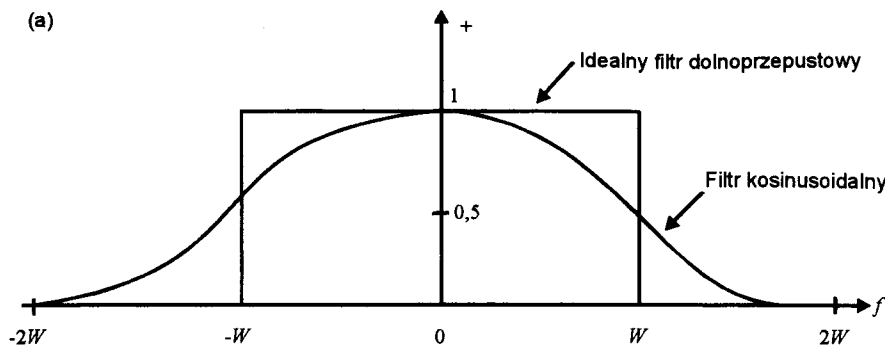
Wpływ bardziej łagodnego nachylenia charakterystyki filtracyjnej kanału na kształt sygnału odbieranego jest widoczny na rysunku 5.3. Aby zredukować amplitudy ogonów oscylacyjnych i zachować przejścia przez zero w widmach impulsów Sa, można zastosować odpowiedni **korektor**. Wypadkowa charakterystyka częstotliwościowa kanału wraz z korektorem może wówczas mieć postać odpowiednika mnożenia charakterystyki idealnego filtra dolnoprzepustowego, o szerokości pasma równoważnej minimum Nyquista, przez drugą odpowiednio dobraną charakterystykę częstotliwościową. Pokażemy teraz pokrótce, iż charakterystyka idealnego filtra dolnoprzepustowego, spleciona z charakterystyką częstotliwościową o symetrii parzystej, daje w efekcie odpowiedź czasową, której przejścia przez zero są takie same jak dla funkcji Sa. Znanym typem charakterystyki stosowanej w praktyce jest obcięta krzywa kosinusoidalna⁴⁾. Na rysunku 5.5a pokazano idealną i obciętą charakterystykę kosinusoidalną wymaganego typu.

Niech poszukiwana charakterystyka kanału wraz z korektorem ma postać $H(f)$ odpowiadającą splotowi funkcji rect, reprezentującej charakterystykę idealną, z charakterystyką kosinusoidalną o podwójnym pasmie. Jako odpowiednik mnożenia kosinusoidy przez funkcję rect, charakterystyka $H(f)$ jest opisana wyrażeniem:

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) * \frac{1}{2} \left\{ \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi f}{4W}\right) \right] \Pi\left(\frac{f}{4W}\right) \right\} \quad (5.6)$$

⁴⁾ Stremmler, F.G., *Introduction to Communication Systems*, wyd. 3, Addison-Wesley, 1990 ss. 386 ÷ 390. ISBN 0-201-51651-0.

można jeszcze zwiększyć moc szumów, zanim cały obszar oczka zaniknie. Wówczas system nie będzie już w stanie podejmować sensownych decyzji i odbiór stanie się niemożliwy. Sam poziom decyzji ma jednak w praktyce pewien stopień tolerancji, co jeszcze bardziej ogranicza margines szumów. Oczko mające horyzontalnie szeroki otwór, lub boki o niewielkim nachyleniu, świadczy o tolerancji na zmiany błędu synchronizacji czyli **jitteru** w odniesieniu do momentu decyzji. W tych warunkach jakikolwiek jitter ma jedynie marginalny wpływ na margines szumów i stopa błędu pozostaje w zasadzie bez zmian. Gdy jednak oczko jest wąskie i nachylenie duże,



Rys. 5.5 Odpowiedź kanału o charakterystyce kosinusoidalnej: a – charakterystyka kanału; b – odpowiedź impulsowa

Odpowiedź impulsową znajdujemy biorąc odwrotną transformatę Fouriera z $H(f)$, dla ułatwienia wyjaśnień dokonano w dwu etapach:

$$h(t) = \frac{1}{2W} \text{Sa}(2Wt) \cdot \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left[\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi f}{4W}\right) \right) \Pi\left(\frac{f}{4W}\right) \right] \right\} \quad (5.7)$$

Odwrotna transformata Fouriera z wyrażenia po prawej stronie $h(t)$ ma postać:

$$g(t) = \int_{-2W}^{2W} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi f}{4W}\right) \right] e^{j2\pi ft} df \quad (5.8)$$

gdzie $\Pi(f/4W)$ ze wzoru (5.6) wprowadza granice całkowania w odwrotnej transformacie Fouriera od $-2W$ do $+2W$. Mamy tożsamość:

$$e^{j2\pi ft} = \cos 2\pi ft + j \sin 2\pi ft \quad (5.9)$$

którą stosujemy we wzorze (5.8) otrzymując:

$$g(t) = \int_{-2W}^{2W} \left[\cos 2\pi ft + j \sin 2\pi ft + \cos 2\pi ft \cos\left(\frac{2\pi f}{4W}\right) + j \sin 2\pi ft \cos\left(\frac{2\pi f}{4W}\right) \right] df \quad (5.10)$$

Całka z $j \sin 2\pi ft$ w podanych granicach jest zerem z uwagi na nieparzystość funkcji sinus. Opuszczając zatem składową sinusoidalną we wzorze (5.10) i stosując do iloczynów znane tożsamości trygonometryczne uzyskujemy wyrażenie:

$$g(t) = \int_{-2W}^{2W} \left\{ \cos 2\pi ft + \frac{1}{2} \left[\cos\left(2\pi f\left(\frac{4Wt-1}{4W}\right)\right) + \right. \right. \quad (5.11)$$

$$\left. \left. + j \sin\left(2\pi f\left(\frac{4Wt-1}{W}\right)\right) + \cos\left(2\pi f\left(\frac{4Wt+1}{4W}\right)\right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + j \sin\left(2\pi f\left(\frac{4Wt+1}{W}\right)\right) \right] \right\} df$$

Grupując inaczej równość (5.11):

$$g(t) = \int_{-2W}^{2W} \left[\cos 2\pi ft + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4Wt-1}{2W/\pi}\right)f + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4Wt+1}{2W/\pi}\right)f \right] df = \quad (5.12)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi t} \sin 2\pi ft + \frac{2W/\pi}{4Wt-1} \sin\left(\frac{4Wt-1}{2W/\pi}\right)f + \right. \quad (5.13)$$

$$\left. + \frac{2W/\pi}{4Wt+1} \sin\left(\frac{4Wt+1}{2W/\pi}\right)f \right]_{-2W}^{2W}$$

i pamiętając, że $\sin(-x) = -\sin(x)$ uzyskujemy:

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \left[\sin 4W\pi t + \frac{2W}{4Wt-1} \sin(4Wt-1)\pi + \frac{2W}{4Wt+1} \sin(4Wt+1)\pi \right] = \quad (5.14)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{t} \sin 4W\pi t + \frac{2W}{4Wt-1} [\sin 4W\pi t \cos(-\pi) - \cos 4W\pi t \sin(-\pi) + \right. \quad (5.15)$$

$$\left. + \frac{2W}{4Wt+1} (\sin 4W\pi t \cos \pi + \cos 4W\pi t \sin \pi) \right\}$$

Ponieważ $\cos \pm \pi = -1$ i $\sin \pm \pi = 0$, wzór (5.15) przybiera postać:

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{t} \sin 4W\pi t - \frac{2W}{4Wt-1} \sin 4W\pi t - \frac{2W}{4Wt+1} \sin 4W\pi t \right\} = \quad (5.16)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin 4W\pi t \frac{1}{t(1-4^2W^2t)} \quad (5.17)$$

Wzór (5.17) można zatem podstawić do (5.7) uzyskując odpowiedź impulsową na wyjściu korektora:

$$h(t) = \text{Sa}2Wt \frac{1}{4W\pi t} \frac{\sin 4W\pi t}{(1-4^2 W^2 t)} = \quad (5.18)$$

$$= \text{Sa}2Wt \frac{\sin 4W\pi t}{4W\pi t(1-4^2 W^2 t)} = \quad (5.19)$$

$$= \text{Sa}2Wt \frac{\sin 4W\pi t}{(1-4^2 W^2 t)} \quad (5.20)$$

Odpowiedź impulsową korektora przedstawiono na rys. 5.5b z którego wynika, że jak w przypadku odpowiedzi Sa kanału idealnego, tak i tu ISI nie występuje. Impuls dodatni typu kosinusoidalnego jest nieco mniej odporny na jitter czasowy ze względu na węższy impuls, lecz ogon zanika szybciej co daje w efekcie polepszenie pod względem ISI. W praktyce, szersze impulsy o większej energii stosuje się z powodu lepszej odporności na szumy. Charakterystykę korektora tak dobrano, aby całkowita charakterystyka układu była taka sama, jak dla impulsu delta. Wówczas odpowiedź czasowa na impuls o skończonej szerokości pozostaje taka sama.

5.1.2 Oddziaływanie szumów na odbiornik

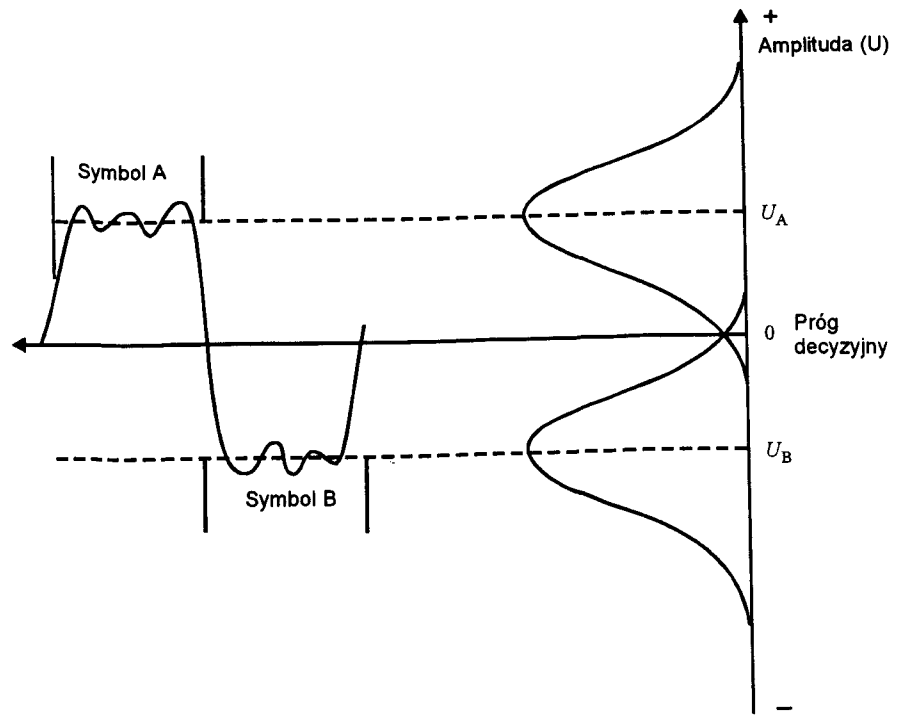
Rozpatrzmy teraz wpływ szumu gaussowskiego, będącego najczęściej spotykanym rodzajem szumu w systemach telekomunikacyjnych i pojawiającego się w czasie transmisji, na sygnał cyfrowy. Sytuację jaka ma miejsce w odbiorniku w przypadku sygnałów binarnych pokazano na rys. 5.6, gdzie ukazano dwa symbole A i B. Funkcję gęstości prawdopodobieństwa (PDF) szumu gaussowskiego nałożono tu na dwa nominalne poziomy sygnały U_A i $-U_B$.

Gdy nadano symbol A, amplituda odpowiadającego mu napięcia szumów jest mniejsza od $-U_A$ w momencie podejmowania decyzji, symbol zostaje zinterpretowany jako symbol B i powstanie błąd. Niech fakt nadania symbolu A nosi nazwę zdarzenia A i niech poziom szumu jest taki, że odbierane napięcie jest mniejsze od 0 V. Powstający wówczas błąd niech nosi nazwę zdarzenia B. Możemy wówczas powiedzieć, że prawdopodobieństwo błędu powstającego po nadaniu symbolu A jest *prawdopodobieństwem łącznym* tych dwu zdarzeń, zapisywanym jako $P(AB)$. Istnieje ponadto *prawdopodobieństwo warunkowe* faktu, że powyższy błąd może pojawić się tylko po nadaniu symbolu A. To prawdopodobieństwo warunkowe zapisywane jako $P(B|A)$ i oznacza prawdopodobieństwo tego, że szum jest mniejszy od $-U_A$, przyjmując że nadano symbol A. Prawdopodobieństwa $P(AB)$ i $P(B|A)$ są powiązane za pomocą znanego wyrażenia:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (5.21)$$

Stąd $P(A|B)$, prawdopodobieństwo błędu gdy nadano symbol A, wyraża się wzorem:

$$P(AB) = P(B|A)P(A) \quad (5.22)$$



Rys. 5.6 Wpływ szumu na sygnał binarny

Podobnym sposobem wyznaczamy prawdopodobieństwo błędu gdy nadano symbol B:

$$P(BA) = P(A|B)P(B) \quad (5.23)$$

Załóżmy teraz, iż oba symbole A i B są równoprawdopodobne, a stąd $P(A)$ i $P(B)$ wynoszą 0,5 i próg decyzyjny leży pośrodku między poziomami napięcia A i B. (Gdy symbole A i B nie są równoprawdopodobne można użyć skramblera na wyjściu nadajnika, aby wyrównać ich prawdopodobieństwa.) Dlatego wypadkowe prawdopodobieństwo błędu P_e jest równe:

$$P_e = P(A|B)P(B) + P(B|A)P(A) \quad (5.24)$$

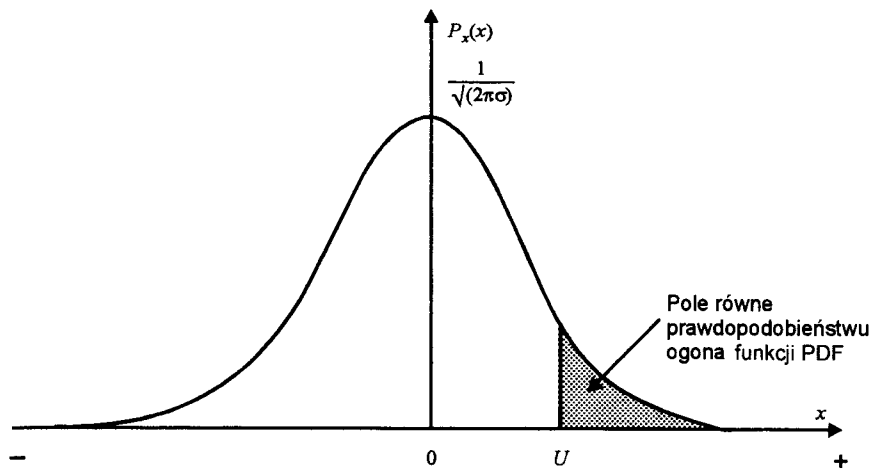
Przyjmujemy, że prawdopodobieństwa $P(A)$ oraz $P(B)$ są równe i wynoszą 0,5. Symetria gaussowskiej PDF oznacza, iż $P(A|B)$ oraz $P(B|A)$ są także równe. Jako wniosek otrzymujemy:

$$P_e = P(A|B) = \quad (5.25)$$

$$= P(B|A) \quad (5.26)$$

Niech różnica potencjałów między U_A i $-U_B$ wynosi 2 V. Wówczas P_e jest równe:

$$P_e = \int_{U_A}^{\infty} P_x(x) dx \quad (5.27)$$



Rys. 5.7 Gaussowska funkcja PDF

Prawdopodobieństwo błędu P_e jest po prostu prawdopodobieństwem tego, że amplituda szumu przekracza $+U$ i jest znane jako **prawdopodobieństwo ogona** PDF, pokazane na rys. 5.7.

W przypadku rozkładu gaussowskiego, funkcja $P_x(x)$ z równania (5.27) ma znaną z literatury postać:

$$P_e = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_U^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (5.28)$$

gdzie w naszym przypadku σ jest wartością skuteczną napięcia szumów.

Prawdopodobieństwo błędu znane jest też pod nazwą **bitowej stopy błędów** (BER) i jeśli przykładowo BER wynosi 10^{-6} , to oznacza po prostu, że jeden błędny bit przypada na każdy milion bitów nadanych. Gdy znane są amplitudy szumu i symboli, prawdopodobieństwa błędów może nie udać się wyznaczyć ze wzoru (5.28), gdyż całka nie ma postaci zamkniętej. Aby dokonać obliczeń numerycznych związanych z BER można użyć różnych metod. Tutaj ograniczymy się do zastosowania **funkcji błędów**⁵⁾, $\text{erf}(x)$:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (5.29)$$

gdzie:

$$x = \frac{U}{\sigma\sqrt{2}} \quad (5.30)$$

Wyrażenie to definiujące funkcję błędów oznacza prawdopodobieństwo tego, iż x leży w przedziale $0 \leq x \leq \pm U$. Prawdopodobieństwo błędów jest równe polu pod krzywą dla

$x > U$. Pole pod krzywą PDF dla wszystkich x wynosi oczywiście 1. Dlatego pole pod krzywą na prawo od U jest dane wzorem:

$$P_e = 0,5[1 - \text{erf}(x)] \quad (5.31)$$

Gdy mamy dwa symbole różniące się o 2 V, stosunek średniej mocy sygnału do mocy szumu wynosi:

$$\frac{\text{Średnia moc sygnału}}{\text{Moc szumu}} = 20 \log_{10} \frac{U}{\sigma} \text{ dB} \quad (5.32)$$

PRZYKŁAD 5.1

Pewien kanał telegraficzny wysyła dwa symbole stałoprądowe o napięciach odpowiednio $+80 \text{ V}$ i -80 V . Dla stosunku S/N równego 8 dB oszacować bitową stopę błędów.

ROZWIĄZANIE

Ze wzoru (5.32) wyznaczamy:

$$\frac{U}{\sigma} = a \log_{10} \frac{\text{Średnia moc sygnału}}{20 \times \text{moc szumu}} \quad (5.33)$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{U}{\sigma} = a \log_{10} \frac{8}{20} = \quad (5.34)$$

$$= 2,512 \quad (5.35)$$

Podstawiając wartość U/σ do wzoru (5.30) znajdujemy:

$$x = \frac{2,512}{\sqrt{2}} = \quad (5.36)$$

$$= 1,776 \quad (5.37)$$

Teraz możemy już wyznaczyć wartość funkcji $\text{erf}(x)$ z tablicy w dodatku E. Przewidywana wartość $\text{erf}(x)$ wynosi 0,988. Teraz wyznaczamy BER ze wzoru (5.31):

$$\text{BER} = 0,5[1 - 0,988] = \quad (5.38)$$

$$= 6 \cdot 10^{-3} \quad (5.39)$$

W tym przykładzie BER jest zawarta między 1 na 100, a 1 na 1000. Dla tak małego stosunku S/N tak duża bitowa stopa błędów nie jest dla nas zaskoczeniem.

Ćwiczenie sprawdzające 5.1 System cyfrowy pasma podstawowego stosuje kodowanie binarne w szumiącym kanale z szumem gaussowskim na wejściu odbiornika o napięciu 100 mW. Dla BER lepszej od 10^{-5} wyznaczyć minimalną różnicę poziomów napięcia dla poszczególnych symboli.

Zamiast kodowania binarnego można zastosować kodowanie wielopoziomowe, gdzie przesyła się zawsze jeden spośród trzech lub większej liczby symboli. Przykładowo,

⁵⁾ Roden, M.S., *Analog and Digital Communication Systems*, wyd. 4, Prentice Hall, 1996, ss. 113 ÷ 114. ISBN 0-13-399965-3.

cztery symbole mogą reprezentować pary bitów, znane jako **dwubity**, 00, 01, 10 i 11. Kodowanie takie pozwala na obniżenie szybkości symbolowej w porównaniu z bitową **szybkością transmisji**. W przypadku czterech symboli konieczne są cztery poziomy napięcia, każdy reprezentujący jeden symbol. Przejścia pomiędzy symbolami zachodzą tu po każdych dwu bitach i dlatego szybkość symbolowa jest równa połowie szybkości transmisji. Ten prosty przykład pokazuje różnicę pomiędzy szybkością bitową transmisji mierzoną w bitach na sekundę i szybkością symbolową (ang. *signalling rate*, przyp. tłum.) mierzoną w bodach. W przypadku kodowania binarnego szybkość bitowa transmisji i szybkość symbolowa są równe.

Gdy stosuje się większą liczbę symboli przy tym samym zakresie napięć, różnice poziomów poszczególnych symboli stają się mniejsze, niż w przypadku kodowania binarnego. Dlatego przy zadanym poziomie szumów prawdopodobieństwo błędu wzrasta. Analiza pokazuje, iż dla zachowania tego samego prawdopodobieństwa błędu co dla transmisji binarnej, S/N należy powiększyć w stosunku:

$$10\log_{10} \frac{m^2 - 1}{3} \text{ dB}$$

przy czym m jest liczbą stosowanych symboli.

Gdy szum pozostaje bez zmian, dodatkowe powiększenie stosunku S/N zapewnia dostateczne odstęp między poziomami symboli przy zadanej wartości BER. Oznacza to, że cały zakres napięć wzrasta w porównaniu z tym, jaki stosuje się dla kodowania binarnego przy tej samej stopie błędu.

W praktyce system wykorzystuje często wiele łączy pracujących w tandemie. Wypadkowa BER takich systemów jest równa sumie bitowych stóp błędu poszczególnych linii przy założeniu, że szумы w poszczególnych łączach są nieskorelowane, co zresztą zwykle ma miejsce.

5.1.3 Pojemność kanału

Maksymalna szybkość transmisji, z jaką można przesyłać informację przez kanał z dowolnie małą stopą błędu, nosi nazwę **pojemności kanału**. Kanały telekomunikacyjne są nieidealne w tym sensie, że ich szerokość pasma jest ograniczona i obecne są w nich szумы. **Twierdzenie Shannona o pojemności kanału** odnosi wymienione czynniki do pojemności kanału zdefiniowanej wzorem:

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bit/s} \tag{5.40}$$

gdzie C – pojemność kanału, W – szerokość pasma, S/N – stosunek sygnał-szum. Przyjęto, iż szum ma rozkład gaussowski. Stosunek S/N jest tu bezwymiarowy, a nie wyrażony w decybelach.

Pobieżne spojrzenie na wzór (5.40) mogłoby doprowadzić do wniosku, iż pojemność kanału wzrasta nieograniczenie wraz z S/N i szerokością pasma. Jest to mylące, gdyż w praktyce moc sygnału jest zawsze ograniczona, a szum gaussowski, jak już widzieliśmy w rozdziale 3, jest określony iloczynem ηW . Przy zadanej szerokości

pasma, pojemność kanału wzrasta ze wzrostem S/N . Jeśli natomiast poziom sygnału pozostaje stały przy wzrastającej szerokości pasma, moc szumów wzrasta też liniowo wraz z szerokością pasma, powodując logarytmiczne zmniejszanie się stosunku S/N . Choć więc pojemność kanału wzrasta wraz ze wzrostem szerokości pasma, szybkość tego wzrostu maleje przy zmniejszaniu się S/N spowodowanym z kolei wzrostem mocy szumu wraz z pasmem. W granicy, gdy szerokość pasma dąży do nieskończoności, pojemność kanału pozostaje ograniczona przez asymptotyczną wartość $S/N \log_2 e$ wynoszącą 1,44 (S/N). Wielkość ta nosi czasem nazwę **granicy Shannona**. W praktyce pojemność kanału jest bardziej jeszcze ograniczona przez takie zjawiska jak przesłuchy (zob. niżej) i zniekształcenia.

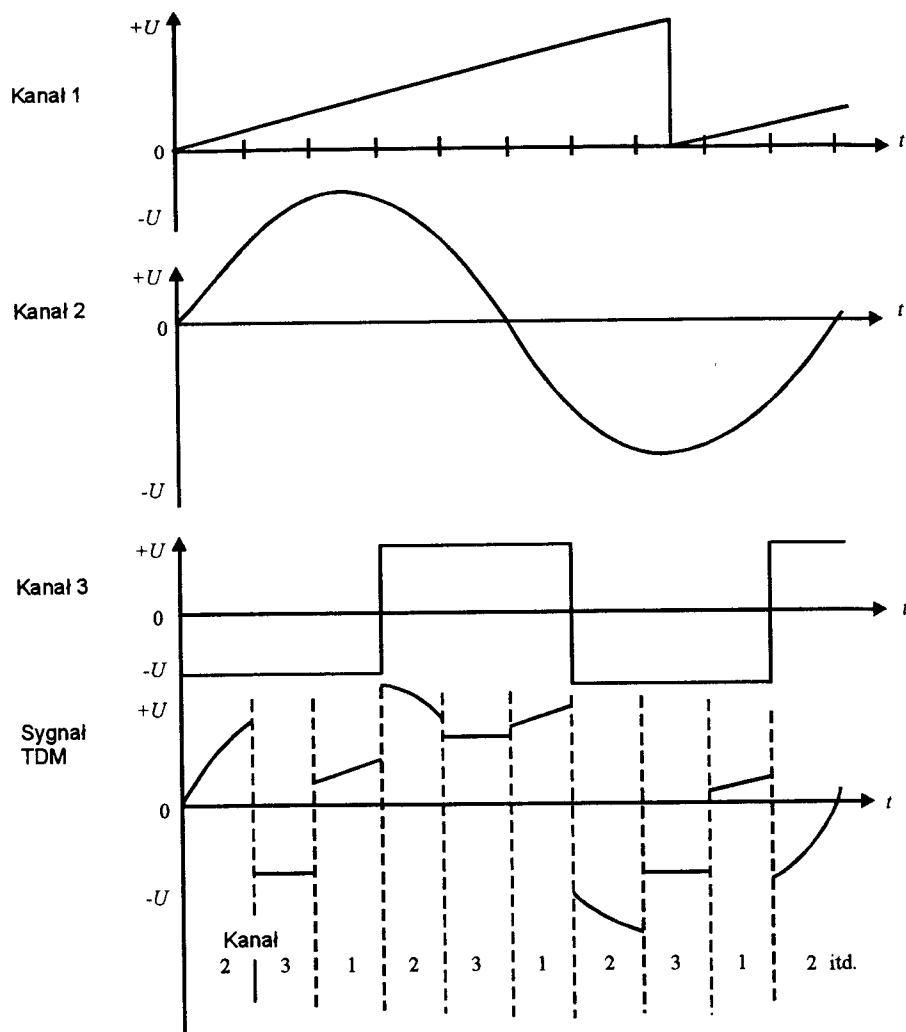
5.2 ZWIELOKROTNIANIE Z PODZIAŁEM CZASOWYM

Na rysunku 5.8 zilustrowano zasadę zwielokrotniania z podziałem czasowym (TDM). TDM jest procesem polegającym na cyklicznym przełączaniu pewnej liczby źródeł sygnału lub kanałów względem pojedynczego wyjścia. Na rysunku pokazano przypadek, gdy liczba kanałów wynosi trzy. Przyrząd służący do powyższego celu nosi nazwę **multipleksa**. Zakładając, iż każdy kanał wejściowy jest próbkowany dostatecznie szybko, aby spełnić kryterium Nyquista podane w rozdziale 2, każdy z sygnałów można w sposób idealny odtworzyć w odbiorniku. W praktyce taki system TDM oparty na technice analogowej będzie poddany znacznym zniekształceniom transmisji, spowodowanym ograniczoną szerokością pasma, zachodzącym głównie na zboczach sygnału pomiędzy sąsiednimi próbkami. Omawiany rysunek 5.8 ma jedynie znaczenie ilustracyjne i nie będziemy z niego w praktyce korzystać.

Nowoczesne systemy TDM są z natury cyfrowe i zwielokrotnianiu podlegają sygnały binarne generowane zwykle przez komputer. Inne typy sygnałów, takie jak telefoniczne lub wideo będące z natury analogowymi, poddaje się przed zwielokrotnianiem zamianie na cyfrowe za pomocą przetworników A/D. Multipleksery mają zazwyczaj cztery kanały wejściowe, aby efektywnie wykorzystać dwie linie sterujące. Decydują one, które konkretne wejście zostaje dołączone do wyjścia w danym przedziale czasowym.

Multipleksery zbudowane są ze standardowych cyfrowych układów logicznych i dlatego są tanie. Odbiornik musi spełniać funkcję odwrotną w stosunku do zwielokrotniania i do tego celu służy demultipleks. Zegar odbiornika sterujący pracą demultipleksa musi być oczywiście dokładnie zsynchronizowany z przychodzącym sygnałem TDM. Przełączanie musi się bowiem odbywać dokładnie w przerwach pomiędzy odbieranymi elementami sygnałów, aby sygnały ani ich fragmenty nie przenosiły się z jednego kanału do drugiego. Tego typu zniekształcenia są znane jako **przesłuchy**.

Ćwiczenie sprawdzające 5.2 Na wejściu multipleksa czterokanałowego, w przedziale czasowym o długości czterech bitów, wystąpiły następujące ciągi bitów: kanał A 1001, kanał B 1100, kanał C 0101, kanał D 0010. Na wspólnej osi czasu wykreślić, podobnie jak na rys. 5.8, sygnały każdego kanału wejściowego i odpowiadający im przebieg zwielokrotniony.



Rys. 5.8 Zwiłokrotnianie z podziałem czasowym

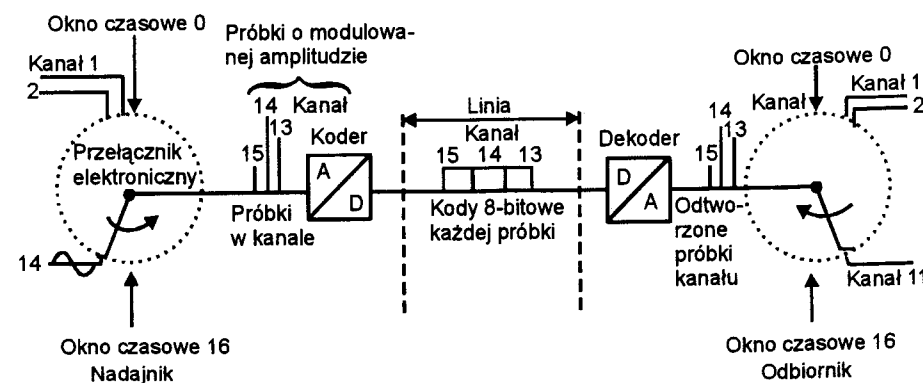
Sygnały wyjściowe multipleksera mają większą szybkość transmisji, niż każdy z jego kanałów wejściowych. Zakłada się przy tym, iż każdy kanał wejściowy ma taką samą szybkość transmisji. W przypadku multipleksera czterokanałowego, w czasie przesyłania jednego bitu na jego wejście, sygnał wyjściowy multipleksera musi obejmować cztery bity, po jednym dla każdego kanału wejściowego. Szybkość transmisji kanału zwiłokrotnionego jest więc równa iloczynowi liczby kanałów wejściowych przez szybkość transmisji pojedynczego kanału. Przy większej liczbie stopni zwiłokrotniających mogą powstać sygnały o bardzo dużej szybkości transmisji. W rezultacie dochodzimy do ważnej zalety systemu TDM, a mianowicie możliwości wykorzystania nowoczesnych szerokopasmowych kanałów transmisyjnych, a w szczególności światłowodów. Szybkości transmisji osiągalne już obecnie w praktyce

przewyższają 1 terabit na sekundę (Tbps). Przy tak szybkiej transmisji możliwe jest przesyłanie bardzo dużej liczby niezależnych sygnałów za pomocą tego samego ośrodka fizycznego, a nie jak dawniej ogromnej liczby oddzielnych przewodów.

5.3 MODULACJA IMPULSOWO-KODOWA

Modulacja impulsowo-kodowa (PCM) jest najprostszym sposobem konwersji sygnału analogowego na sygnał cyfrowy przed jego nadaniem. Sygnał jest próbkowany w regularnych przedziałach czasowych i przekształcany do postaci cyfrowej za pomocą przetwornika analogowo-cyfrowego (A/D). Każda próbka jest następnie transmitowana szeregowo za pomocą pojedynczego kanału w formie ciągu bitów. Każdy ciąg bitów reprezentujący pojedynczą próbkę może być uważany za **kod impulsu** i dlatego mówimy, że sygnał został poddany modulacji impulsowo-kodowej.

Na rysunku 5.9 przedstawiono 30-kanałowy system PCM, szeroko stosowany w europejskich sieciach telefonicznych. Urządzenia transmisyjne wypełniające złożone operacje przetwarzania sygnałów dla obsługi pojedynczego kanału były dotąd z reguły bardzo nieekonomiczne (choć teraz jest inaczej). Na rysunku 5.9 pokazano, jak w systemie TDM wykorzystuje się pojedynczy przetwornik A/D, kanał i przetwornik D/A. Pokazano tu jeden kierunek transmisji. W praktyce dla uzyskania telekomunikacji dwukierunkowej stosuje się drugi analogiczny system, działający w odwrotnym kierunku. Dla każdego kanału przydzielono pasmo od 300 Hz do 3,4 KHz (szerokość pasma powszechnie przyjęta dla transmisji mowy). Każdy analogowy sygnał wejściowy jest próbkowany z częstotliwością 8 KHz, co spełnia warunek Nyquista. Otrzymany sygnał z **modulowaną amplitudą impulsów** (PAM) przychodzi na wejście kodera, w którym każda próbka zostaje zakodowana na 8-bitowe słowo, czyli **kod impulsu**, za pomocą przetwornika A/D. Mamy więc 256 różnych poziomów napięcia, zwanych **poziomami kwantowania**. W praktyce, dla wszystkich kanałów mowy przyznaje się tu 30 okien czasowych. Pozostałe dwa okna czasowe, o numerach 0 i 16, służą dla ramki oraz kanałowych sygnałów sterujących. Sygnały te zapewniają dokładną synchronizację par mul-



Rys. 5.9 30. kanałowy system z modulacją impulsowo-kodową

tiplekser/demultiplekser w każdym z okien czasowych. Umożliwiają one ponadto przekazywanie takiej informacji, jak sygnały wybierające (ang. *dialing information*, przyp. tłum.) i sygnały (zerujące) (ang. *clear-down signals*, przyp. tłum.) dla wszystkich 30. kanałów – wysyłane wspólnym kanałem w pojedynczym oknie czasowym. (Metoda znana pod nazwą **sygnalizacji we wspólnym kanale**, ang. *common channel signalling*.)

Odbiornik spełnia funkcję odwrotną, a mianowicie dekodowanie i demultipleksing. Każdy kanał zawiera ponadto filtr dolnoprzepustowy (nie pokazany na rys. 5.9) nazywany **filtrem odtwarzającym**, o częstotliwości granicznej 4 kHz, sprowadzający odtworzone próbki PAM do postaci analogowej.

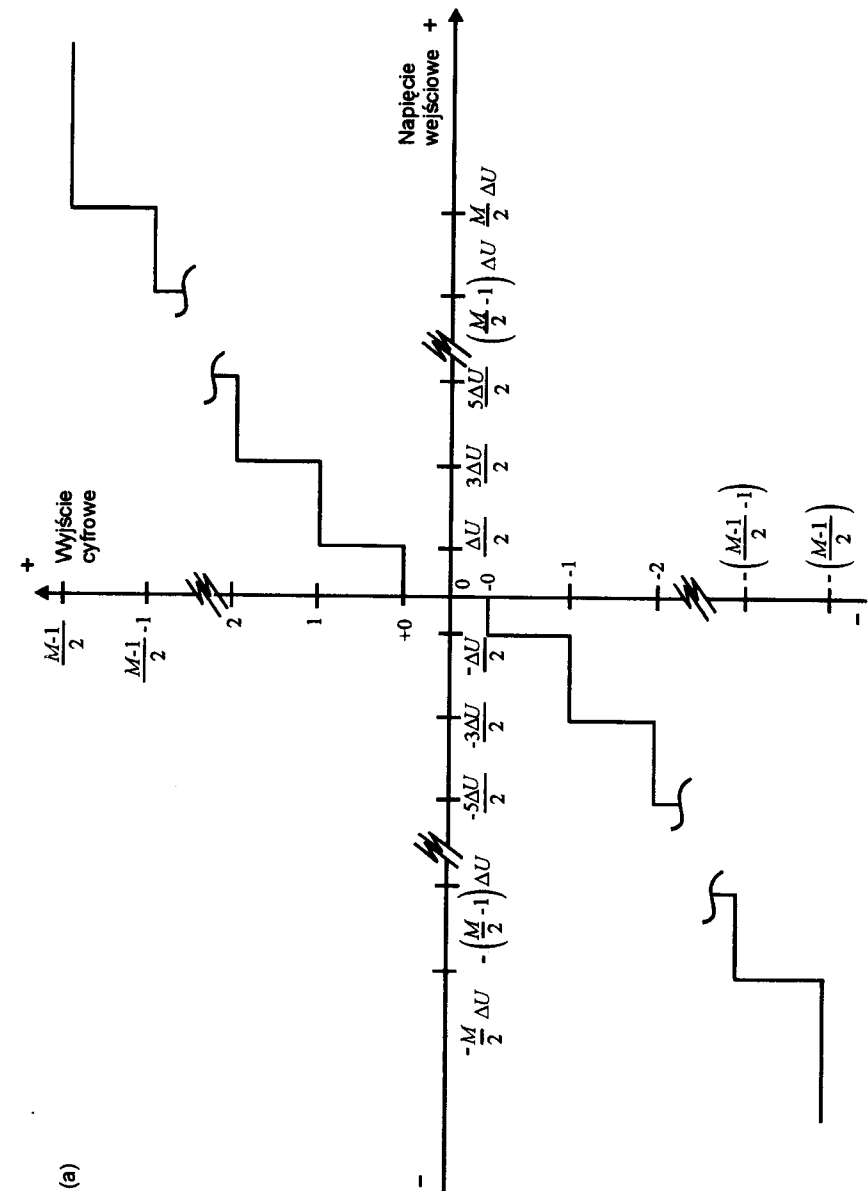
System PCM skonstruowano dla międzygłędowej łączności telefonicznej. Dwadzieścia cztery (jak w Japonii oraz USA) lub 30 kanałów telefonicznych można przesyłać za pomocą dwu standardowych par przewodów telefonicznych. PCM umożliwił szybki rozwój ruchu telefonicznego w latach 60., gdyż nie istniała już konieczność kładzenia dużej liczby dodatkowych kabli. System 30-kanałowy pozwala na zaoszczędzenie 26. par przewodów, co stanowi 15-krotną oszczędność kabla. Szybkość transmisji pojedynczego kanału telefonicznego wynosi tu 64 kb/s. Ta wartość, 64 kb/s, stała się odtąd uniwersalnym standardem w przemyśle telekomunikacyjnym i jest dotąd używana w systemach teleinformatycznych.

Na rysunku 5.10 zilustrowano stosowaną w systemach PCM zasadę kodowania i dekodowania. Jak podano na rys. 5.10a, konwerter analogowo-cyfrowy ma $(M-1)/2$ plus 1 (włączając +0) możliwych dodatnich stanów wyjściowych, czyli poziomów kwantowania oraz $(M-1)/2 + 1$ poziomów ujemnych, co daje w sumie $M+1$ poziomów. Przy takiej reprezentacji charakterystyki przetwornika A/D, M przyjmuje się jako liczbę nieparzystą. Powstaje pytanie, dlaczego możliwe są dwa zerowe stany wyjściowe. Niech sygnał wejściowy przetwornika pozostaje stale w przedziale $\pm \Delta U$. Gdyby istniał tylko jeden kod zerowy, na wyjściu tego przetwornika występowałby tylko ciąg binarny samych zer. Brak zmian poziomu w sygnale cyfrowym stanowi problem w odbiorniku, gdyż nie pozwala określić, gdzie istnieją granice między ciągami binarnymi reprezentującymi kolejne próbki. Innymi słowy, synchronizacja zegara w odbiorniku byłaby trudna do uzyskania. Algorytm dekodowania stosowany przy charakterystyce przetwornika z rys. 5.10a powoduje, że wytwarzana jest taka sama liczba dodatnich i ujemnych poziomów wyjściowych w ciągu czasowym. Dzieje się tak, gdyż kolejne zera są kodowane z przeciwnymi znakami nawet, jeśli nie sąsiadują ze sobą. Pozwala to na pokonanie powyższego problemu słów kodowych o samych zerach i ma tę dodatkową zaletę, iż przy odpowiednim kodowaniu liniowym przed transmisją przez kanał, dostateczna informacja zegarowa może być zachowana w porównaniu z okresowym nadawaniem takiego ciągu, jak np. 0000.

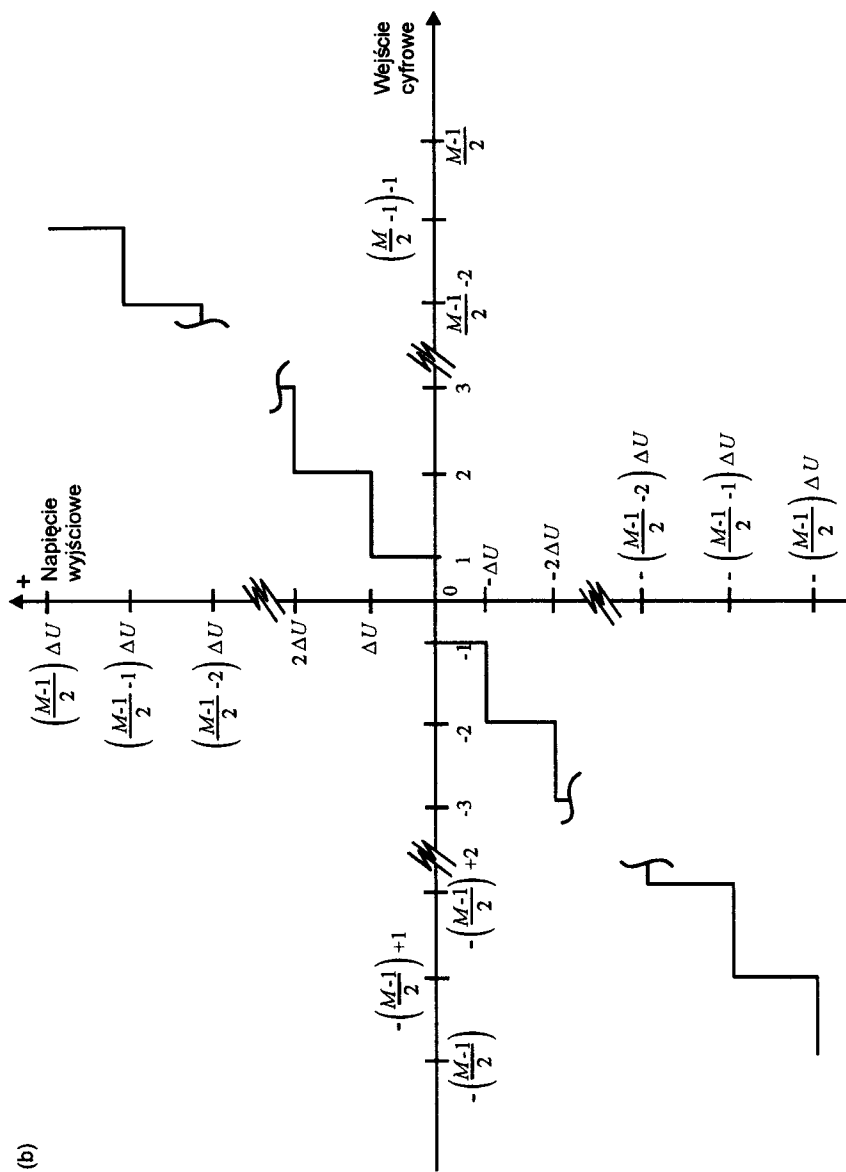
Analizując rys. 5.10a widzimy, iż przy wzroście sygnału wejściowego od zera do $+\Delta U/2$ stan wyjściowy przetwornika jest +0. Po osiągnięciu wartości $+\Delta U/2$, na wyjściu pojawia się 1. Aby na wyjściu pojawiło się 2, amplituda wejściowa musi wzrosnąć o dalsze ΔU , itd. Po przekroczeniu zakresu $\pm M/2 \Delta U$ wkraczamy w zakres nasycenia i sygnał wyjściowy już się nie zmienia.

Jeśli liczbę bitów na próbkę oznaczmy przez N , otrzymamy wzór:

$$M = 2^N - 1 \quad (5.41)$$



Rys. 5.10 Kodowanie i dekodowanie: a – charakterystyka przetwornika A/D;



Rys. 5.10 b – charakterystyka przetwornika D/A

W praktyce stosuje się z reguły kodowanie 8-bitowe, co daje $2^8 = 256$ możliwych poziomów kwantowania. Dla kodowania znaku napięcia wykorzystuje się zwykle najbardziej znaczące bity słowa wyjściowego. Pozostałe 7 bitów reprezentuje wartość bezwzględną napięcia. Przykładowo, dla przetwornika ośmiobitowego, słowo 1XXXXXXX oznacza napięcie dodatnie, a słowo 0XXXXXXX napięcie ujemne.

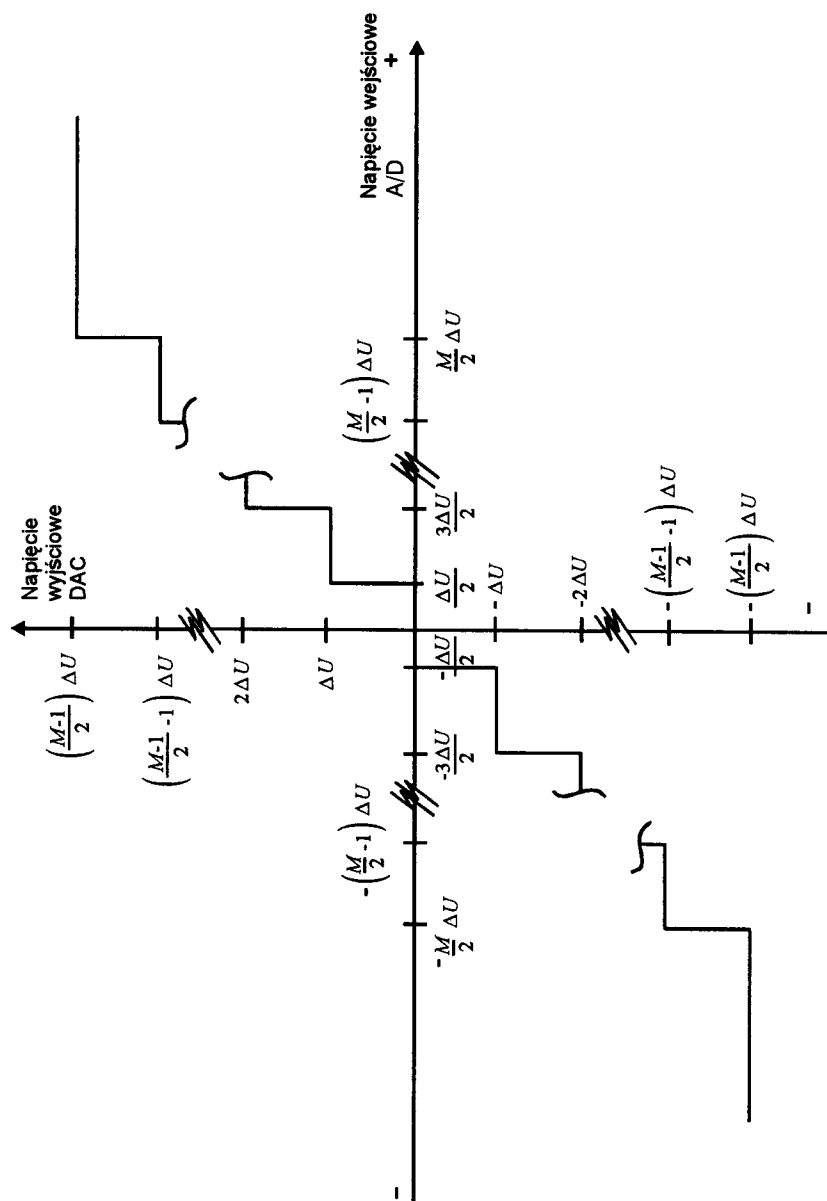
Na rysunku 5.10b pokazano charakterystykę przetwornika cyfrowo-analogowego odbiornika. Sygnały zerowe $+0$ i -0 są przetwarzane na napięcie 0 V. Wszystkie inne wartości, od ± 1 do $\pm (M-1)/2$ są natomiast przetwarzane na napięcia z zakresu od $\pm \Delta U$ do $\pm (M-1)/2 \cdot \Delta U$. Szczególnie istotna jest wypadkowa charakterystyka kanału PCM pokazana na rys. 5.11. Na wyjściu systemu nie pojawia się jako 0 żadne dodatnie napięcie wejściowe nadajnika o wartości między 0 V i $\Delta U/2$. Napięcia o wartościach z zakresu od $\Delta U/2$ do $3\Delta U/2$ (przedział kwantowania ΔU) pojawiają się na wyjściu jako ΔU itd. Z tej charakterystyki wynika, że występują dyskretne przedziały o długości ΔU , w których może się zmieniać sygnał wejściowy, lecz gdzie nie występują zmiany napięcia wyjściowego. Oznacza to, że zawsze występuje niewielka rozbieżność między napięciem wejściowym a wyjściowym. Rozbieżność ta nosi nazwę **błędu kwantowania** i jej przebieg pokazano na rys. 5.12. Jak można stwierdzić, charakterystyki przetworników A/D i D/A zostały tak dobrane, aby maksymalna wartość błędu kwantowania wnosila $\pm \Delta U/2$, co stanowi tylko połowę przedziału kwantowania przetwornika A/D.

Błąd kwantowania wywiera znaczny wpływ na transmisję cyfrową. Weźmy pod uwagę system cyfrowy z modulacją PCM. Błędy transmisji zniekształcają wartości próbek cyfrowych i mogą silnie oddziaływać na pojedyncze próbki. Jeśli takie błędy nie występują zbyt często, a więc rzadziej niż raz na okres najwyższej składowej częstotliwości sygnału, można je w większości przypadków zignorować. (W przeciwnym razie, a szczególnie przy transmisji danych, można stosować metody detekcji i korekcji błędów.)

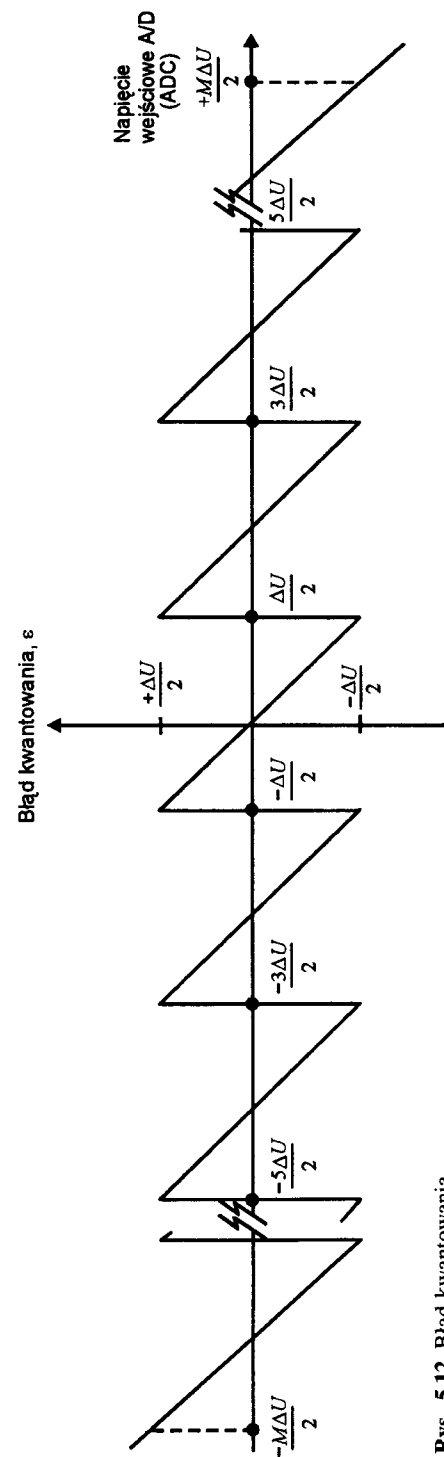
Możliwe jest kaskadowe łączenie pewnej liczby systemów PCM tak, iż sygnały pomiędzy poszczególnymi systemami przetwarza się do postaci analogowej. Całkowity błąd kwantowania pozostaje jednak w granicach $\pm \Delta U/2$. Szumy w systemach cyfrowych są spowodowane błędem kwantowania i dlatego szum kwantowania nie zależy od odległości. Szum w systemach analogowych jest głównie addytywny i dlatego w miarę propagacji sygnału od nadajnika do odbiornika szum stopniowo narasta. Zatem w odróżnieniu od systemów cyfrowych, szum ten narasta z odległością.

Szum kwantowania nie przekracza zgodnie z rys. 5.12 wartości $\pm \Delta U/2$, lecz jego wpływ zależy od tego, czy sygnał jest mały czy duży. Weźmy dla przykładu pod uwagę sygnał mowy. Mówiąc głośno uzyskuje się duże sygnały wejściowe, o wartościach szczytowych bliskich nawet maksymalnemu niezmniejszonemu poziomowi $(M-1)/2 \Delta U$. Każdy błąd kwantowania, jaki pojawia się na wyjściu przetwornika D/A, jest stosunkowo mały w porównaniu do sygnału. Przy cichej rozmowie wytwarzane są natomiast słabe sygnały na wejściu D/A. Jego sygnał wyjściowy jest teraz znacznie mniejszy i względna amplituda błędu kwantowania staje się czynnikiem istotnym. Intuicyjnie biorąc stosunek sygnał-szum sygnału PCM wzrasta wraz z amplitudą sygnału, przynajmniej w rozpatrywanym przypadku liniowych charakterystyk przetworników A/D i D/A.

Odbiornik powinien w idealnym przypadku dawać na wyjściu sygnał analogowy, będący wiernym odtworzeniem sygnału informacyjnego z wejścia nadajnika. Oznacza to, że wpływ błędu kwantowania powinien być jak najmniejszy. Można to osiągnąć



Rys. 5.11 Łączna charakterystyka przetworników A/D i D/A



Rys. 5.12 Błąd kwantowania

stosując możliwie jak największą liczbę poziomów kwantowania w całym zakresie możliwych amplitud sygnału. To z kolei implikuje możliwe duże wartości M . Przy danej częstotliwości próbkowania, liczba bitów na próbkę wyznaczona ze wzoru (5.41) wynosi:

$$N = \log_2(M - 1) \tag{5.42}$$

Wraz ze wzrostem M wzrasta jednak również szerokość pasma. W rezultacie, aby utrzymać tę szerokość pasma w rozsądnych granicach, trzeba określić minimalną wartość M , przy której jakość transmisji systemu jest wystarczająca. W praktyce przeprowadza się subiektywne testy dla określenia N , a stąd i M . Jak wskazują przykładowe dane eksperymentalne ⁶⁾, aby uzyskać dostateczną zrozumiałość mowy (bez wymaganej rozpoznawalności osoby mówiącego) wymagane jest od 128 do 256 poziomów kwantowania. Z tego właśnie powodu w telefonicznych systemach transmisyjnych PCM przyjmuje się 8 bitów, co stanowi rozsądny kompromis między jakością a szerokością pasma. Przesyłanie muzyki o wysokiej jakości wymaga większej rozdzielczości i dlatego stosuje się tu do 16 bitów, co odpowiada kodowaniu 16-bitowemu.

Stosunek sygnał-szum w systemach PCM jest zwykle definiowany jako stosunek średniokwadratowej wartości sygnału wejściowego przetwornika A/D $m(t)$ do średniokwadratowej wartości błędu kwantowania. W tym sensie, średniokwadratowa wartość błędu kwantowania może być nazwana szumem kwantowania N_q . Możemy więc napisać:

$$\left(\frac{S}{N_q}\right) = \frac{\overline{m^2(t)}}{\overline{\varepsilon^2(t)}} \tag{5.43}$$

Zanim postaramy się wyznaczyć ten stosunek sygnału do szumu kwantowania trzeba znaleźć wyrażenie na $\overline{\varepsilon^2(t)}$. Gdy jak to ma z reguły miejsce w praktyce, wartość ε jest mała w porównaniu z dopuszczalną wartością szczytową napięcia sygnału, można zrobić następujące założenie: wszystkie wartości błędu kwantowania leżące w całym zakresie kwantowanej wielkości są równoprawdopodobne. To oznacza z kolei, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa PDF zmiennej ε , oznaczana jako $P(\varepsilon)$, ma rozkład równomierny w przedziale od $-\Delta U/2$ do $\Delta U/2$, jak na rys. 5.13.

Błąd średniokwadratowy znajdujemy stosując standardową procedurę matematyczną:

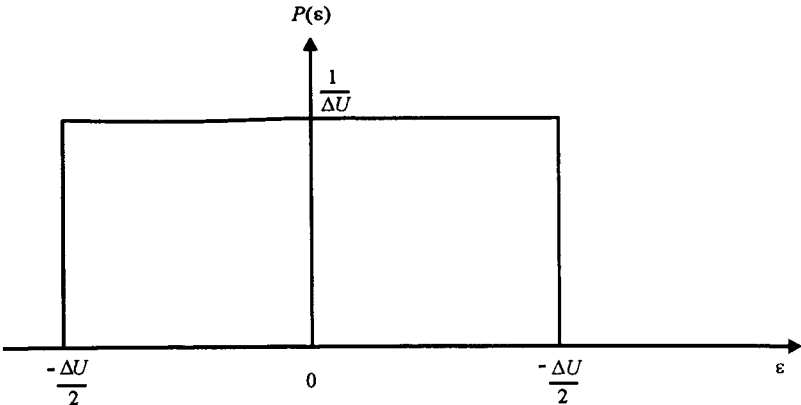
$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{\Delta U} \int_{-\Delta U/2}^{\Delta U/2} x^2 dx = \tag{5.44}$$

$$= \frac{1}{\Delta U} \left(\frac{1}{3} x^3\right)_{-\Delta U/2}^{\Delta U/2} = \tag{5.45}$$

$$= \frac{1}{3\Delta U} \left[\left(\frac{\Delta U}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\Delta U}{2}\right)^3\right] \tag{5.46}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{\Delta U^2}{12} \tag{5.47}$$

⁶⁾ Stremler, F.G., *Introduction to Communications Systems*, wyd. 3, Addison-Wesley, 1990, s. 544. ISBN 0-201-51651-9.



Rys. 5.13 Rozkład prawdopodobieństwa błędu

Aby wyznaczyć stosunek sygnału do szumu kwantowania trzeba jeszcze znaleźć wartość średniokwadratową napięcia sygnału. Szacując średniokwadratową wartość napięcia szumu przyjeśliśmy słusznie równomierny rozkład funkcji $P(\varepsilon)$. Rozkład prawdopodobieństwa napięcia sygnału użytecznego nie jest już sprawą tak oczywistą. Sygnały spotykane w praktyce nie mają bowiem rozkładu równomiernego. Wartość średniokwadratowa napięcia sygnału zależy więc od rodzaju sygnału i jego rozkładu prawdopodobieństwa. Nawet nie znając rozkładu napięcia danego sygnału, możemy przynajmniej określić stosunek sygnału do szumu kwantowania, gdy sygnał przyjmuje wartość szczytową. Amplituda sygnału na wejściu przetwornika A/D wyraża się wówczas wzorem:

$$\hat{U} = \frac{M}{2} \Delta U \tag{5.48}$$

Na podstawie wzoru (5.47) wnioskujemy, że wartość skuteczna napięcia szumu wynosi:

$$\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{\Delta U^2}{12}} = \tag{5.49}$$

$$= \frac{\Delta U}{\sqrt{12}} \tag{5.50}$$

Stosunek szczytowego napięcia sygnału do skutecznego napięcia szumów wyznaczony ze wzorów (5.48) i (5.50) jest dany wyrażeniem:

$$\frac{\hat{U}}{\sqrt{\overline{\varepsilon^2}}} = \frac{\frac{M}{2} \Delta U}{\frac{\Delta U}{\sqrt{12}}} = \tag{5.51}$$

$$= \frac{M}{2} \Delta U \frac{\sqrt{4} \sqrt{3}}{\Delta U} \tag{5.52}$$

i ostatecznie:

$$\frac{\hat{U}}{\sqrt{\varepsilon^2}} = \sqrt{3} M \quad (5.53)$$

Aby wyznaczyć stosunek sygnału do szumu kwantowania trzeba jeszcze znaleźć stosunek sygnał-szum dla mocy, a nie dla napięć jak w równaniu (5.53). Ten stosunek mocy otrzymujemy biorąc obustronnie do kwadratu równość (5.53):

$$(S/N_q)_{pk} = 3M^2 \quad (5.54)$$

Na podstawie wzoru (5.42) można napisać:

$$M - 1 = a \log_2 N \quad (5.55)$$

lub:

$$M = 2^N - 1 \quad (5.56)$$

Podstawiając wzór (5.56) do (5.53) otrzymujemy:

$$(S/N_q)_{pk} = 3(2^N - 1)^2 \quad (5.57)$$

lub to samo w decybelach:

$$(S/N_q)_{pk} = 10 \log_{10} [3(2^N - 1)^2] \text{ dB} = \quad (5.58)$$

$$= 10 \log_{10} 3 + 20 \log_{10} 2^N = \quad (5.59)$$

$$= 4,8 + 6N \text{ dB} \quad (5.60)$$

PRZYKŁAD 5.2

W pewnym systemie PCM próbki są kodowane z użyciem 8-bitowego przetwornika A/D. Wyznaczyć w decybelach stosunek sygnał-szum kwantowania w odniesieniu do szczytowej wartości sygnału.

ROZWIĄZANIE

$$(S/N_q)_{pk} = 4,8 + 6N \text{ dB} \quad (5.61)$$

W naszym przykładzie $N = 8$ i dlatego:

$$(S/N_q)_{pk} = 4,8 + 6 \cdot 8 \text{ dB} = \quad (5.62)$$

$$= 52,8 \text{ dB} \quad (5.63)$$

Jest to bardzo duża wartość, lecz odnosi się ona tylko do wartości szczytowej napięcia sygnału. Sygnały spotykane w praktyce mają odpowiednio mniejszy stosunek sygnał-szum kwantowania.

Równanie (5.54), choć stanowi użyteczny wskaźnik maksymalnej możliwej wartości stosunku sygnał-szum kwantowania, nie jest zbyt miarodajne dla rzeczywistych sygnałów. Mimo to może być wykorzystywane do oceny właściwości szumowych systemów PCM.

Następne ćwiczenie sprawdzające dotyczy wyznaczania stosunku sygnał-szum kwantowania przy założeniu, że napięcie sygnału ma rozkład równomierny w całym zakresie dopuszczalnych napięć wejściowych przetwornika A/D.

Ćwiczenie sprawdzające 5.3 Napięcie sygnału zmienia się w granicach od $-M\Delta U/2$ do $M\Delta U/2$ i wszystkie wartości napięć są w tym przedziale równoprawdopodobne:

- pokazać, że stosunek sygnał-szum kwantowania wynosi M^2 (wskazówka: narysować i wykorzystać rysunek analogiczny do rys. 5.13, lecz w odniesieniu do napięcia sygnału, a nie do napięcia błędu);
- oszacować stosunek sygnał-szum kwantowania w decybelach dla kodowania 8 bitów na próbkę.

Zajmiemy się teraz szerokością pasma sygnału PCM. Jak już pokazaliśmy na początku tego rozdziału, maksymalna możliwa stopa kodu (dla sygnałów binarnych) wynosi 2 bit/Hz szerokości pasma. W przykładzie 5.3 pokazano, jak szerokość pasma związana jest z liczbą bitów na próbkę i z częstotliwością próbkowania.

PRZYKŁAD 5.3

Wyznaczyć minimalną szerokość pasma wymaganą dla omówionego wcześniej 30-kanalowego systemu PCM. Porównać tę szerokość pasma z odpowiednim pasmem systemu FDM.

ROZWIĄZANIE

$$\text{Szybkość symbolowa} = \text{liczba okien czasowych} \times \text{liczba bitów na próbkę} \times \text{częstotliwość próbkowania} \quad (5.64)$$

W systemie PCM o 30-kanalach całkowita liczba okien czasowych wynosi 32. Wobec tego:

$$\text{Szybkość symbolowa} = 32 \cdot 8 \text{ bitów} \cdot 8000 \text{ kHz} = \quad (5.65)$$

$$= 2,048 \text{ Mb/s} \quad (5.66)$$

Minimalna szerokość pasma dla tego systemu PCM wynosi zatem 1,024 MHz.

W przypadku odpowiedniego systemu FDM, przyjmując dla każdego kanału pasmo 4 KHz, otrzymamy:

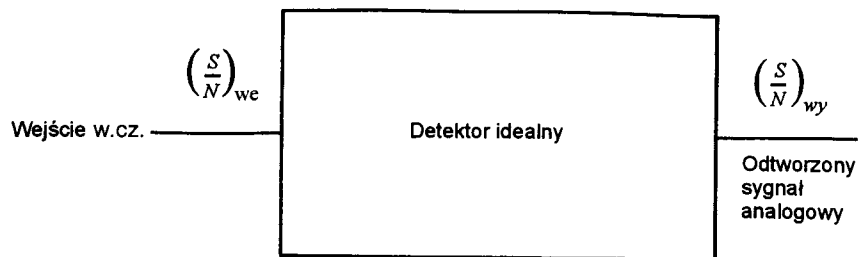
$$\text{Szerokość pasma} = \text{liczba kanałów} \times \text{pasma jednego kanału} = \quad (5.67)$$

$$= 30 \cdot 4 \text{ kHz} = \quad (5.68)$$

$$= 120 \text{ kHz} \quad (5.69)$$

W porównaniu z analogowym systemem FDM, cyfrowy system transmisyjny wymaga o rząd wielkości większej szerokości pasma. System PCM jest więc, tak jak FM, systemem z rozszerzaniem pasma.

Podobne porównanie jak dla odbiornika demodulującego sygnały AM i FM w rozdziale 4, możliwe jest także dla odbiornika PCM. Weźmy pod uwagę schemat



Rys. 5.14 Odbiornik PCM

blokowy z rys. 5.14. Przyjmujemy, że detektor jest idealny w tym sensie, iż zawartość informacji na wejściu jest taka sama jak na wyjściu. Założymy ponadto, iż sygnał wejściowy jest zawarty w paśmie B_T Hz równym szerokości kanału. Szerokość pasma odbieranego sygnału informacyjnego $m(t)$ oznaczmy jak zwykle przez W . Na podstawie wzoru (5.40) na pojemność kanału można założyć, że z informacyjnego punktu widzenia nie ma utraty mocy szumu przy odbiorze. Odpowiednie parametry dla wejścia i wyjścia można zatem porównać otrzymując zależność:

$$B_T \log_2 [1 + (S/N)_{we}] = W \log_2 [1 + (S/N)_{wy}] \quad (5.70)$$

Równanie (5.70) wynikające ze wzoru Shannona na pojemność kanału napisano przy założeniu, iż szumowy składnik wyrażenia $(S/N)_{we}$ ma rozkład gaussowski. Choć w czasie transmisji wprowadzany jest pewien szum gaussowski, szum w systemie PCM stanowi głównie szum kwantowania. Dlatego równanie (5.70) nosi charakter przybliżony.

Dla dużych wartości stosunku sygnał-szum wzór (5.70) można uprościć:

$$B_T \log_2 (S/N)_{we} = W \log_2 (S/N)_{wy} \quad (5.71)$$

Pozbywając się logarytmów uzyskujemy wzór:

$$(S/N)_{wy}^W = (S/N)_{we}^{B_T} \quad (5.72)$$

Biorąc teraz obustronnie pierwiastek stopnia W otrzymujemy:

$$(S/N)_{wy} = (S/N)_{we}^{B_T/W} \quad (5.73)$$

lub w decybelach:

$$(S/N)_{wy} \text{ dB} = \frac{B_T}{W} 10 \log_{10} \left(\frac{S}{N} \right)_{we} \quad (5.74)$$

B_T/W może być nazwane współczynnikiem rozszerzenia pasma i jak wynika ze wzoru (5.74) wyrażony w decybelach stosunek sygnału analogowego do szumu ulega zwiększeniu o ten właśnie współczynnik, w porównaniu z odpowiednią wartością dla sygnału odbieranego. Analiza ta, choć przeprowadzona dla pojedynczego kanału PCM, odnosi się też do systemu wielokanałowego.

Możemy dokonać zgrubnego porównania wartości $(S/N)_{wy}$ dla systemu PCM i innych typów modulacji. W rozdziale 4 współczynnik $(S/N)_{we}$ reprezentował stosunek

sygnał-szum na wejściu demodulatora, co odpowiada wejściu odbiornika z rys. 5.14. W systemie PCM szerokość pasma szumów ηW sygnału z pasma podstawowego wzrasta o współczynnik powiększenia pasma. W odniesieniu do systemu o paśmie podstawowym, odbierana moc sygnału w systemie PCM jest identyczna i możemy napisać:

$$(S/N)_{we} = (S/N)_{we} \frac{B_T}{W} \quad (5.75)$$

Oznacza to, że współczynnik S/N sygnału odebranego przez równoważny system o paśmie podstawowym przewyższa stosunek sygnał-szum systemu PCM o współczynnik rozszerzenia pasma. Wzór (5.75) można przekształcić do postaci:

$$(S/N)_{we} = \frac{(S/N)_{wy}}{B_T/W} \quad (5.76)$$

Można kontynuować porównanie sygnału PCM z równoważnym sygnałem cyfrowym o paśmie podstawowym jak w rozdziale 4, przyrównując systemy z modulacją oraz równoważną transmisję w paśmie podstawowym.

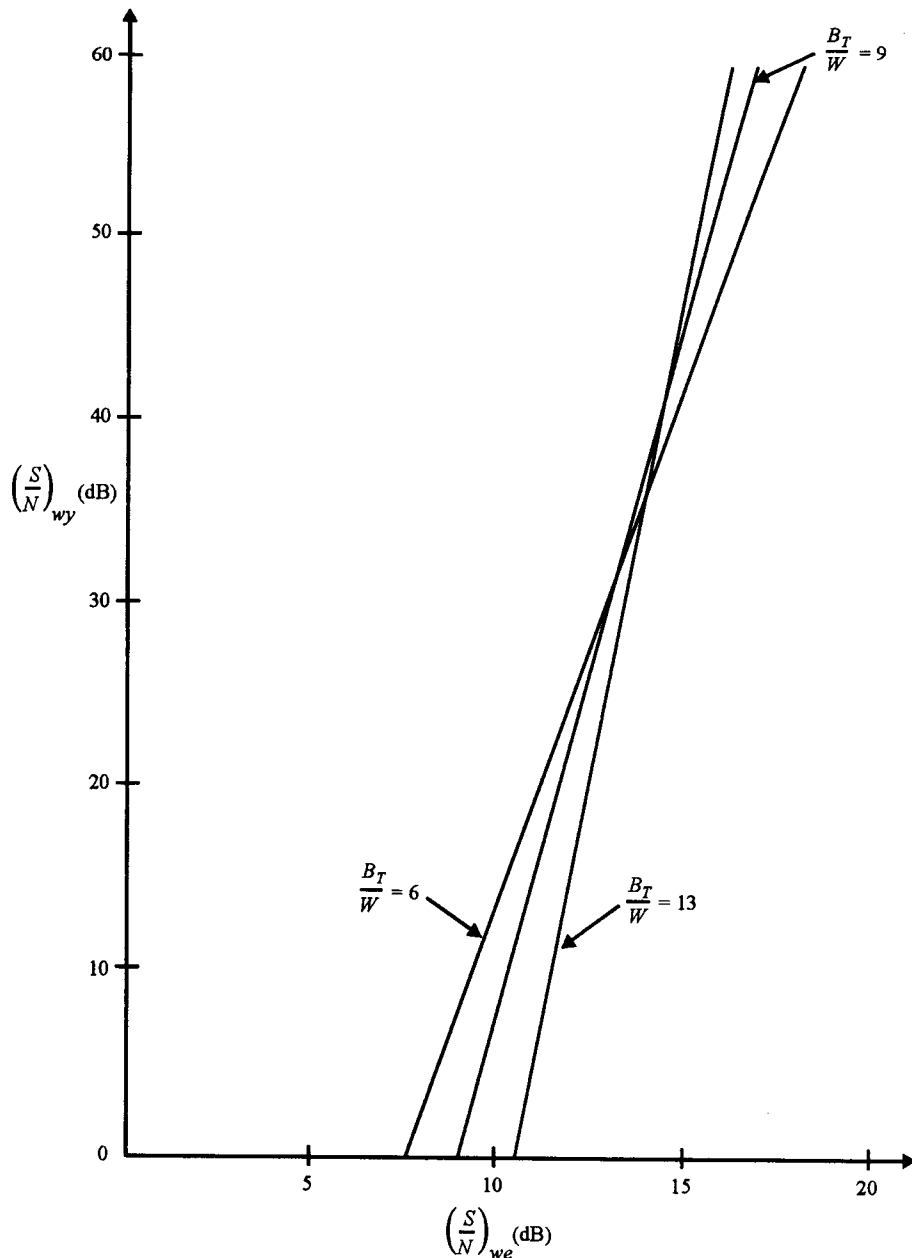
Podstawiając wzór (5.76) do (5.74) otrzymujemy:

$$(S/N)_{wy} \text{ dB} = \frac{B_T}{W} 10 \log_{10} \left(\frac{(S/N)_{wy}}{B_T/W} \right) = \quad (5.77)$$

$$= \frac{B_T}{W} \left[(S/N)_{we} \text{ dB} - 10 \log_{10} \left(\frac{B_T}{W} \right) \text{ dB} \right] \quad (5.78)$$

Równanie (5.78) pozwala nam skonstruować wykres pokazany na rys. 5.15, ilustrujący właściwości szumowe systemu PCM w funkcji wejściowego stosunku sygnał-szum dla współczynników rozszerzenia pasma 6, 9 i 13. Stosunek $(S/N)_{we}$ jest równoważny stosunkowi $(S/N)_{wy}$ równoważnego systemu o paśmie podstawowym. Dlatego bezpośrednio można stwierdzić, że $(S/N)_{wy}$ systemu PCM jest znacznie większy od tego stosunku dla równoważnego systemu o paśmie podstawowym. Wszystkie trzy krzywe są w zasadzie podobne, bez względu na współczynnik rozszerzenia pasma. Całkiem dobre właściwości szumowe można uzyskać nawet jeśli kanały (a pośrednio sygnały) wnoszą znaczne szumy. W dodatku tylko niewielkie polepszenie wejściowego stosunku sygnał-szum daje tu znaczną poprawę stosunku $(S/N)_{wy}$.

Gdy porównać ten wykres z podobnymi krzywymi z rys. 4.23 dla modulacji analogowej to można stwierdzić, że PCM oferuje znaczną poprawę właściwości szumowych, nawet w stosunku do systemu FM. Tak więc PCM jest bardzo korzystnym systemem opartym na rozszerzaniu pasma. Porównując system PCM z systemami analogowymi trzeba jednak zachować pewną ostrożność. Poprzednia analiza prowadząca do wzoru (5.78) odnosi się bowiem do stosunków sygnał-szum w sensie gaussowskim. Jak już w tym rozdziale stwierdziliśmy, szum w systemie PCM jest spowodowany głównie kwantowaniem. Dlatego takie porównywanie PCM z modulacją analogową nie jest całkowicie uprawnione. Mimo to ogólne tendencje dotyczące omawianych właściwości szumowych pozostają w mocy.



Rys. 5.15 Porównanie transmisji PCM i w pasmie podstawowym

PRZYKŁAD 5.4

Oszacować współczynnik rozszerzenia pasma dla 8-bitowego systemu PCM używanego do transmisji mowy.

ROZWIĄZANIE

Minimalna wartość B_T jest równa połowie szybkości symbolowej (przyjmując najlepszy przypadek 2 bit/Hz). Szybkość symbolowa jest dana wzorem:

$$\text{Szybkość symbolowa} = \text{częstotliwość próbkowania} \times \text{liczba bitów na próbkę} \quad (5.79)$$

Dlatego:

$$B_T = \frac{1}{2} \times \text{częstotliwość próbkowania} \times \text{liczba bitów na próbkę} \quad (5.80)$$

Aby spełnić kryterium Nyquista, minimalna częstotliwość próbkowania jest równa podwójnej najwyższej częstotliwości sygnału, czyli $2W$. Dlatego:

$$B_T \geq NW \quad (5.81)$$

Przyjmujemy najwyższą częstotliwość sygnału mowy równą 4 KHz, przyjmując:

$$B_T = 8 \cdot 4000 \text{ Hz} \quad (5.82)$$

$$= 32 \text{ kHz} \quad (5.83)$$

Współczynnik rozszerzenia pasma wynosi:

$$\frac{B_T}{W} = \frac{32 \text{ kHz}}{4 \text{ kHz}} = \quad (5.84)$$

$$= 8 \quad (5.85)$$

PRZYKŁAD 5.5

Oszacować współczynnik $(S/N)_{wy}$ odbiornika 8-bitowego systemu PCM o współczynniku rozszerzenia pasma jak w przykładzie 5.4. Biorąc pod uwagę równoważny stosunek sygnał-szum z pasma podstawowego 14 dB, porównać odpowiedź ze stosunkiem sygnału do szumu kwantowania dla wartości szczytowej sygnału, otrzymanym w przykładzie 5.3.1.

ROZWIĄZANIE

Na podstawie wzoru (5.78) stosunek sygnał-szum wynosi:

$$(S/N)_{wy} = 8(14 - 10 \log_{10} 8) \text{ dB} \quad (5.86)$$

$$= 39,8 \text{ dB} \quad (5.87)$$

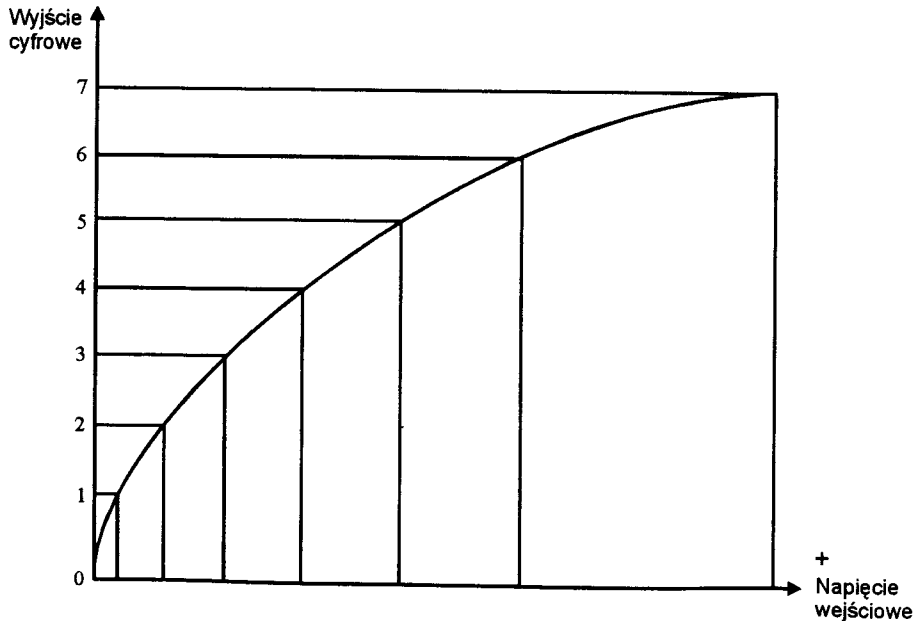
Obliczanie stosunku $(S/N)_{wy}$ dla systemu PCM jest podejściem alternatywnym względem przedstawionego wcześniej znajdowania stosunku sygnału do szumu kwantowania. Porównując obie metody można stwierdzić, że $(S/N)_{wy}$ o wartości 39,8 dB odpowiada stosunek sygnału do szumu kwantowania z przykładu 5.2 równy 52,8 dB. Różnica wynika z dwu przyczyn. W przykładzie 5.2 przyjęto szczytową wartość sygnału, której odpowiada możliwie największy stosunek sygnału do szumu kwantowania. Analiza dokonana w tym przykładzie uwzględnia ponadto w pewnym stopniu szum

wnoszony przez kanał, którego nie obejmuje podejście obejmujące tylko szum kwantowania. Należy stąd wnioskować, iż sensowna wartość stosunku sygnału do szumu leży między 52,8 i 39,8 dB.

Jak już ustaliliśmy, gdy liczba poziomów kwantowania się zwiększa, stosunek sygnału do szumu kwantowania wzrasta kosztem zwiększenia szybkości symbolowej oraz szerokości pasma. Analizując charakterystyki liniowego przetwornika A/D z rys. 5.10 stwierdzamy, iż dla małych amplitud sygnału wejściowego, stosunek sygnału do szumu kwantowania jest mniejszy, niż dla większych. Kodowanie liniowe wymaga, aby dla uzyskania dostatecznej wartości S/N przy niskich poziomach sygnałów liczba poziomów kwantowania była dostatecznie duża. Prowadzi to do nadmiernych wartości S/N przy wysokich poziomach sygnałów, czemu towarzyszy nadmiernie szerokie pasmo.

Możliwe jest jednak poprawienie jakości systemów PCM bez zwiększania liczby poziomów kwantowania. Celowi temu służą dodatkowe procesy kompresji i ekspansji, zwane łącznie **kompandacją**.

Gdy proces konwersji przetwornika A/D jest nieliniowy, jak przykładowo na rys. 5.16 (gdzie pokazano tylko połowę wykresu dla dodatnich sygnałów), większe przedziały wyjściowych wartości binarnych przypisano mniejszym przedziałom napięć wejściowych i vice versa. Mówimy wówczas o procesie **kompresji**. Oznacza to, iż błąd kwantowania dla danego napięcia wejściowego jest najniższy, gdy jest ono małe, a następnie stopniowo rośnie wraz ze wzrostem napięcia. Idealnym celem tego procesu jest zapewnienie stałego stosunku sygnału do szumu kwantowania w całym zakresie napięć wejściowych kodera. Aby to uzyskać zmniejsza się błąd kwantowania dla małych napięć wejściowych kosztem zwiększania tego błędu przy większych napięciach. W tym



Rys. 5.16 Kompresja

ostatnim przypadku, jak już powiedziano, zwiększony szum kwantowania pojawia się przy wyższych poziomach napięcia wejściowego. Dlatego stosunek sygnału do szumu kwantowania może być porównywalny, w zależności od stosowanej charakterystyki nieliniowej, z tym jaki występuje dla mniejszych sygnałów wejściowych. Działanie błędu kwantowania polega tu na prawie ustalonej i dogodnej wartości stosunek sygnału do szumu kwantowania w całym zakresie napięć wejściowych.

Dekoder odbiornika ma charakterystykę komplementarną w stosunku do kodera. Tym sposobem łącznym wynikiem działania kodera i dekodera jest charakterystyka liniowa co powoduje, że odtworzony sygnał analogowy jest równy sygnałowi z wejścia nadajnika, niezależnie od występującego w systemie błędu kwantowania.

W praktyce stosuje się dwa różniące się nieco od siebie prawa kodowania, oba z natury logarytmiczne. W Europie Międzynarodowa Unia Telekomunikacyjna (ITU-T) zaleca prawo:

$$u_{wy} = \frac{1 + \log Au_{we}}{1 + \log A} \tag{5.88}$$

dla:

$$\frac{1}{A} \leq u_{we} \leq 1$$

lub:

$$u_{wy} = \frac{Au_{we}}{1 + \log A} \tag{5.89}$$

dla:

$$0 \leq u_{we} \leq \frac{1}{A}$$

Prawo to nazywa się *prawem-A*, gdzie przyjmuje się $A = 87,6$. W USA i Japonii stosowane jest prawo kompresji zwane *prawem-μ*:

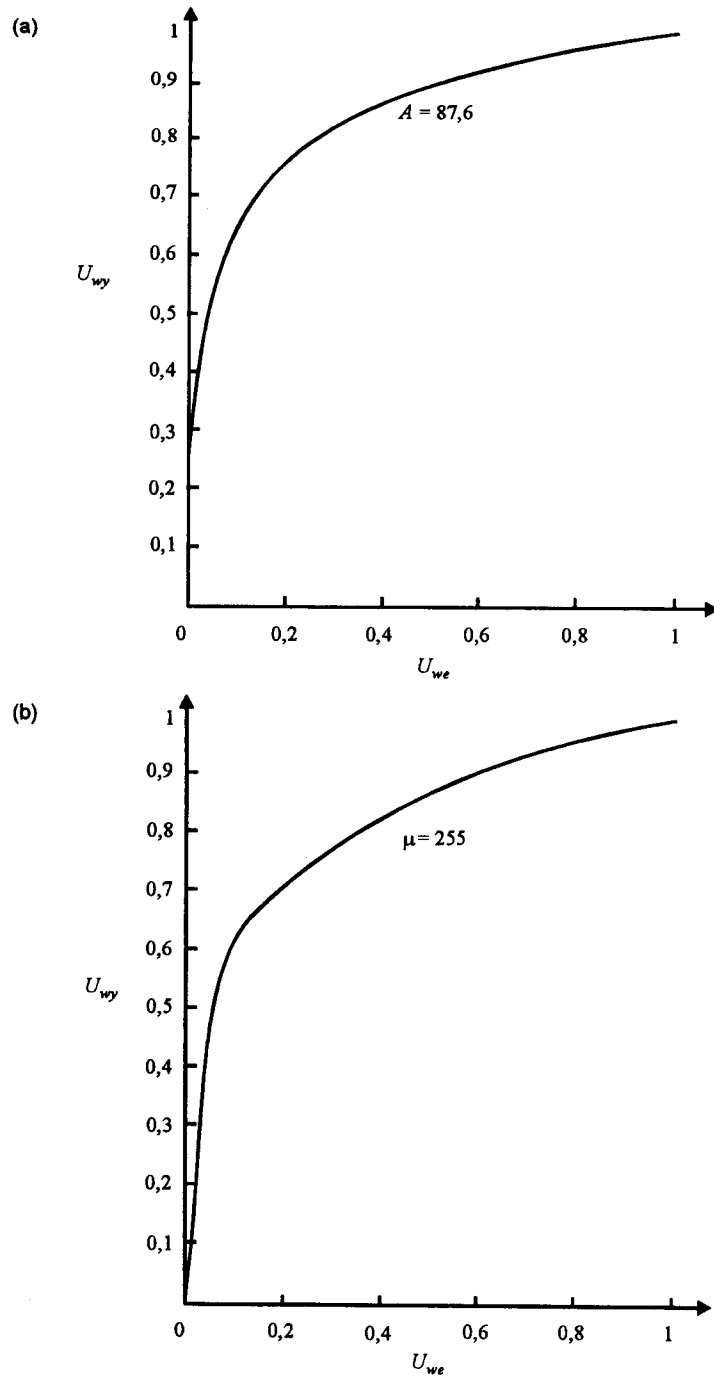
$$u_{wy} = \frac{\log(1 + \mu u_{we})}{\log(1 + \mu)} \tag{5.90}$$

dla:

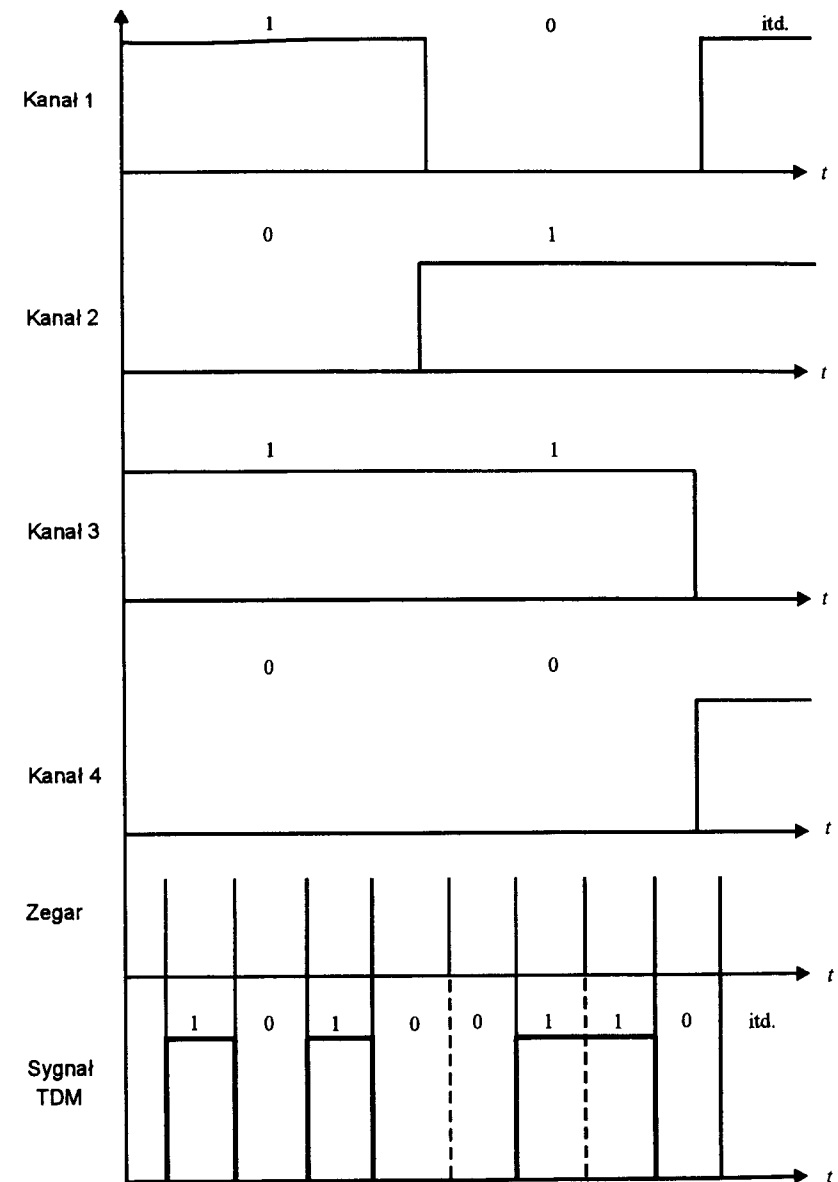
$$0 \leq u_{we} \leq 1$$

Wartość współczynnika μ przyjęta dla systemów telefonicznych wynosi 255. Charakterystyki kompresji dla prawa-A i prawa-μ podano na rys. 5.17. Dla wygody porównania obie osie znormalizowano w stosunku do wartości 1.

Kończąc rozważania na temat systemu PCM trzeba powiedzieć o jego dalszym rozwoju. Jak już wspomniano, system PCM był początkowo stosowany w telefonicznych łączach lokalnych. Wkrótce potem systemy PCM w jeszcze większym stopniu z wielokrotniono, niezależnie od podobnych zmian w systemach TDM. Cztery systemy PCM



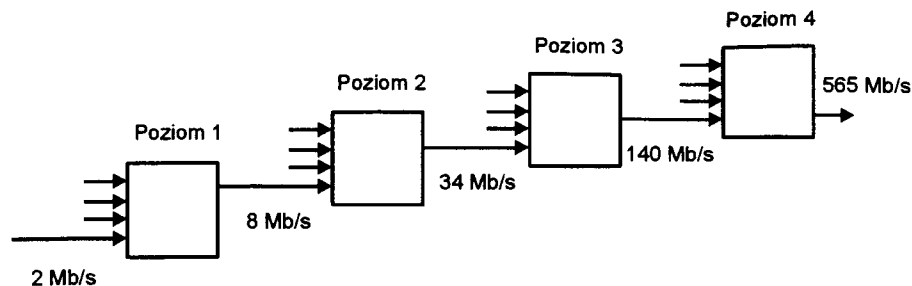
Rys. 5.17 Charakterystyki kompresji: a – prawo-A; b – prawo- μ



Rys. 5.18 Zwielokrotnienie czterech sygnałów PCM

można zwielokrotnić w sposób pokazany na rys. 5.18. Każdy system można rozpatrywać jako jeden kanał o szybkości transmisji 2 Mb/s. Cały sygnał TDM ma szybkość transmisji 8 Mb/s.

Zaletą zwielokrotniania pewnej liczby systemów PCM było początkowo efektywne wykorzystanie istniejącej międzymiastowej sieci kabli współosiowych, dostosowanej do ruchu telefonicznego opartego na zwielokrotnianiu z podziałem częstotliwości. Jej przestawienie z telefonii analogowej na cyfrową doprowadziło do



Rys. 5.19 Plesiochroniczna hierarchia łączy cyfrowych

znaczej redukcji kosztów i wykorzystania wzrostu jakości transmisji związanego z przekazem cyfrowym. Cztery zwielokrotnione kanały PCM tworzą poziom 1 systemu, zwany poziomem pierwotnym, tak zwanej **plesiochronicznej hierarchii cyfrowej** (PDH). Można dokonać dalszego zwielokrotniania z wykorzystaniem pasma kabla koncentrycznego i szerszego jeszcze pasma łączy światłowodowych. Na rysunku 5.19 pokazano, jak na poziomie 2 cztery strumienie 8 Mb/s tworzą jeden strumień 34 Mb/s itd., aż do utworzenia strumienia 565 Mb/s. Taka szybkość transmisji sygnałów możliwa jest już tylko za pomocą łączy optycznych. Dwa tak zwielokrotnione strumienie pozwalają już dziś zrealizować za pomocą światłowodu strumień 1 Tb/s. Przy dokładniejszej analizie osiąganych szybkości transmisji ze zwielokrotnianiem można stwierdzić, że na wyjściu multiplexera pojawiają się pewne dodatkowe bity, co nie wynika z prostego zsumowania strumieni wejściowych. Te bity dodaje się dla zapewnienia synchronizacji poszczególnych odbiorników, co jest niezbędne, aby ich demultiplexery działały prawidłowo.

5.4 MODULACJA CYFROWA

Transmisja danych w paśmie podstawowym wymaga kanału o pasmie częstotliwości od zera (prąd stały) do częstotliwości odpowiadających pewnej wielokrotności szybkości symbolowej. Układy stałoprądowe (DC) stosowane były od dawna w telefonii publicznej (PTO) o paśmie podstawowym, lecz ze względu na pogarszanie się jakości sygnału wraz z odległością, nie nadają się dla transmisji na odległości większe od 20 km i do niedawna nie były przystosowane do większych szybkości transmisji. Fizyczne właściwości alternatywnych kanałów transmisyjnych, takich jak łączy radiowe i optyczne, często narzucają określone zakresy częstotliwości pracy, wykluczając przy tym transmisję na niskich częstotliwościach i dla prądu stałego. Przed nadejściem ery cyfrowej, podstawowym typem łączy transmisyjnego dostępnym dla „wolnych” użytkowników był telefoniczny kanał analogowy. Charakteryzuje się on typowym pasmem częstotliwości 300 ÷ 3400 Hz, a jego dolnoprzepustowa charakterystyka wyklucza transmisję danych w paśmie podstawowym.

Aby pokonać ograniczenia zasięgu układów stałoprądowych można zastosować modulację fali nośnej, wygodnej do przesyłania kanałem analogowym. W tym punkcie skoncentrujemy się na wykorzystaniu telefonicznych kanałów analogowych, gdyż nawet dzisiaj są one szeroko używane na całym świecie. Za ich pomocą można przysyłać dane

do dowolnego miejsca na świecie, z wykorzystaniem zwykłych aparatów i linii telefonicznych. Do tego celu skonstruowano urządzenie znane jako **modem** (modulator/demodulator).

Sinusoidalna fala nośna ma trzy parametry: amplitudę, częstotliwość i fazę, które można poddać modulacji lub **kluczowaniu** w sposób opisany w rozdziale 4, używając w tym celu cyfrowego sygnału modulującego. Termin *kluczowanie* ma swe źródło w telegrafii, gdzie stosowano dawniej ręczne kodowanie sygnału alfabetem Morse’a za pomocą klucza. Trzy podstawowe formy modulacji, AM, FM i PM są w przypadku modulacji cyfrowej znane jako **kluczowanie z przesuwem amplitudy**, **kluczowanie z przesuwem częstotliwości** i **kluczowanie z przesuwem fazy** (ASK, FSK, PSK).

5.4.1 Kluczowanie z przesuwem amplitudy (ASK)

Modulacja jest operacją mnożenia i będziemy zakładać, że fala nośna jest sinusoidą o amplitudzie U i częstotliwości nośnej f_c . ASK jest zwykle opisywana w dziedzinie czasu jako sygnał DSBSC postaci:

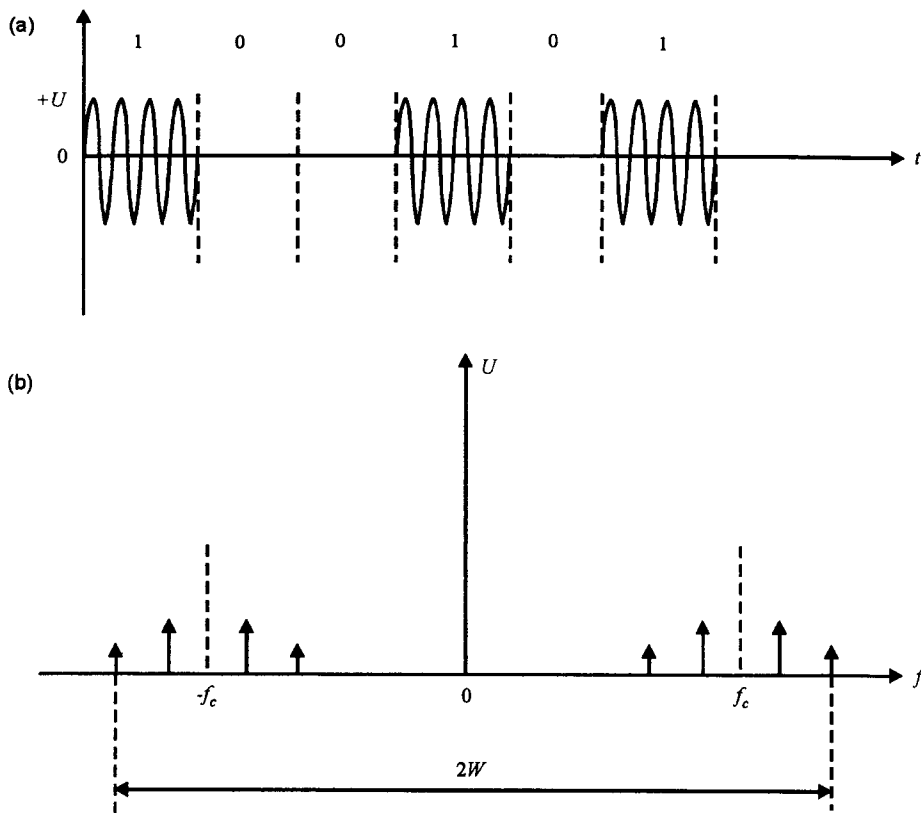
$$g(t) = m(t) \sin 2\pi f_c t \quad (5.91)$$

Widmo tego sygnału modulowanego znajduje się za pomocą transformaty Fouriera składającej się z pary delta-funkcji o częstotliwości nośnej, rozmieszczonych symetrycznie względem częstotliwości 0 Hz, splecionych z transformatą Fouriera sygnału $m(t)$. Można to zapisać w postaci:

$$G(f) = \mathcal{F}\{m(t)\} \star \frac{1}{2} [\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)] \quad (5.92)$$

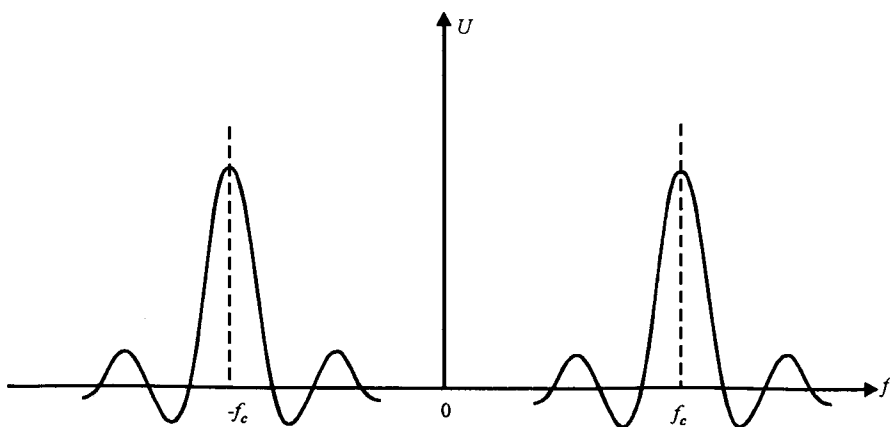
W wyniku splecenia pary delta-funkcji z transformatą $M(f)$, transformata Fouriera z $m(t)$ zostaje rozmieszczona obustronnie wokół częstotliwości $\pm f_c$. W praktyce $m(t)$ nie daje się dokładnie określić, gdyż rozmieszczenie jedynek i zer zależy od konkretnego sygnału, jaki zostaje wysłany. Rozważmy przypadek okresowego sygnału binarnego postaci 1010. Z punktu poświęconego szeregom Fouriera w rozdziale 2 już wiemy, że widmo takiego sygnału zawiera nieskończoną liczbę nieparzystych harmonicznych. Odpowiedni kształt impulsu $m(t)$ zostanie zachowany nawet, gdy ograniczymy pasmo do częstotliwości podstawowej i trzeciej harmonicznej. Czasową i częstotliwościową reprezentację takiego sygnału pokazano na rys. 5.20. Stanowi ona szczególnie przypadek sygnału ASK, gdzie jednemu z symboli odpowiada brak sygnału, znany jako **kluczowanie z przerywaniem fali nośnej** (OOK). Widmo sygnału zawiera, jak wynika z równania 5.91, dolną i górną wstęgę boczną bez fali nośnej. Jak z tego wynika, praktycznie wymagane pasmo ma w przybliżeniu szerokość równą sześciokrotnej szybkości modulacji lub trzykrotnej szybkości symbolowej R .

Jak stwierdziliśmy już w punkcie 5.1.1, aby uniknąć interferencji międzysymbolowej (ISI) trzeba stosować bardziej wyrafinowany sposób kształtowania sygnału, niż proste obcięcie pasma, taki jak np. charakterystyka kosinusoidalna. Przedstawiona analiza jest jednak użyteczna, gdyż reprezentuje najgorszy możliwy przypadek. Jakikol-



Rys. 5.20 Kluczowanie z przesuwem amplitudy: a – sygnał; b – widmo

wiek inny sygnał będzie bowiem modulować falę nośną z mniejszą szybkością i dlatego mieć będzie odpowiednio węższe widmo. Praktycznie stosowany w nadajniku sposób kształtowania widma daje zwykle widmo bliskie funkcji Sa. Na rysunku 5.21 pokazano uogólnione widmo sygnału ASK.



Rys. 5.21 Uogólnione widmo sygnału ASK

W odniesieniu do reprezentacji czasowej sygnału ASK z rys. 5.20 można stwierdzić, że do jego demodulacji można zastosować prosty i tani detektor obwiedni. Alternatywne użycie detektora koherentnego pozwala uzyskać polepszenie stosunku S/N na wyjściu odbiornika o 3 do 4 dB. Skoro jednak detekcja koherentna jest bardziej kosztowna, istnieje kompromis pomiędzy jakością i ceną. W pewnych zastosowaniach, jak w przypadku bardzo zaszumionego środowiska, kosztowniejsza detekcja koherentna może okazać się opłacalna.

5.4.2 Kluczowanie z przesuwem częstotliwości (FSK)

W systemie FSK przypisuje się zwykle dwie różne częstotliwości symbolom binarnym 1 i 0. Nazywamy go wówczas **binarnym systemem FSK** (BFSK). Modulator FSK może być rozpatrywany jako układ zawierający dwa źródła częstotliwości odpowiednio przełączane, zgodnie ze zmianami binarnego sygnału modulującego. Na rysunku 5.22a pokazano sygnał FSK, dla którego binarnemu 0 odpowiada częstotliwość f_0 a binarnemu 1 częstotliwość f_1 (ten przydział częstotliwości jest oczywiście arbitralny).

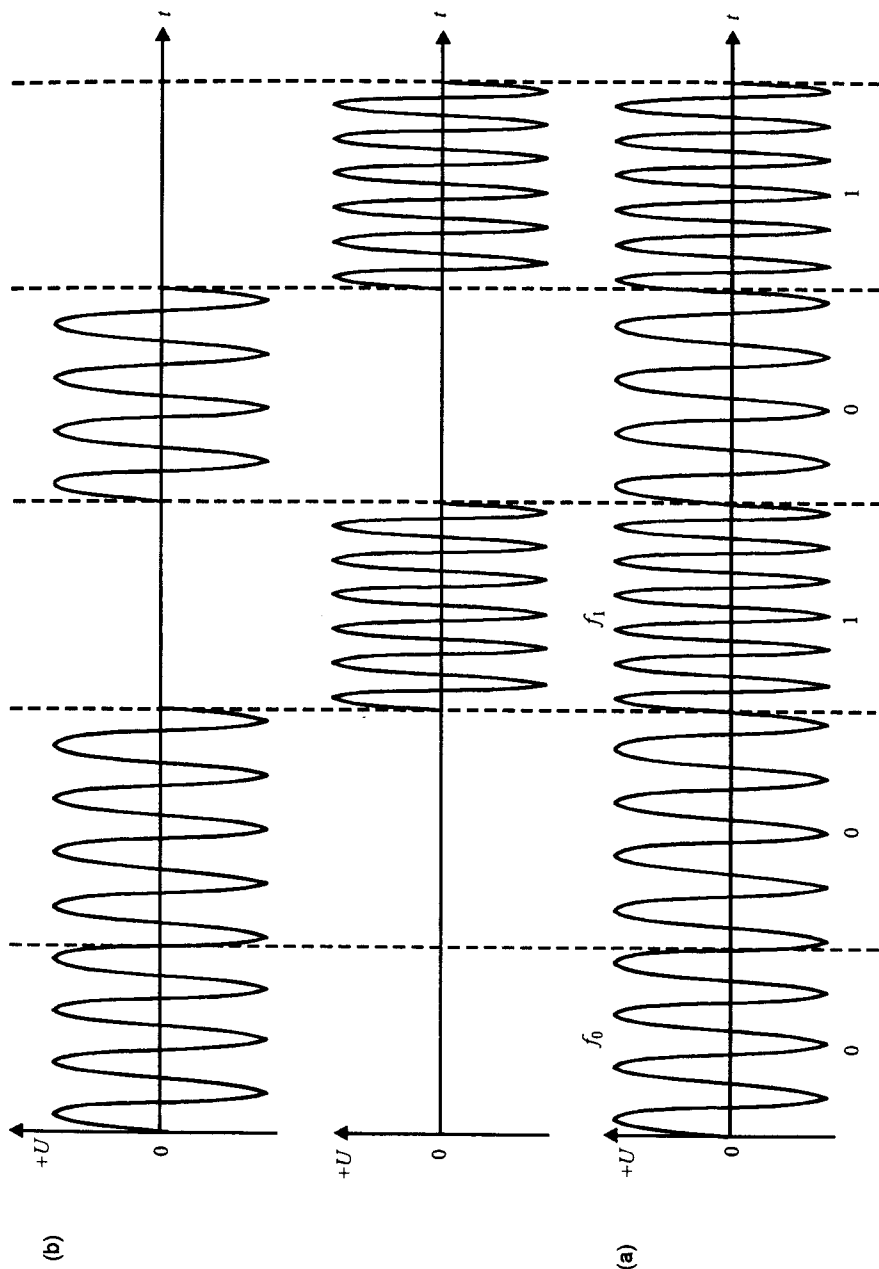
Przewaga systemu FSK nad systemem ASK polega, jak w przypadku FM, na stałej amplitudzie sygnału. To oznacza, że większość szumu, jaki objawia się w postaci zmian amplitudy odbieranego sygnału, można prosto usunąć za pomocą ogranicznika amplitudy. Stałość obwiedni sygnału FSK umożliwia zastosowanie automatycznej regulacji wzmocnienia (AGC) zapobiegającej zmianom poziomu sygnału podczas transmisji.

Sygnał FSK może być rozpatrywany jako suma dwu oddzielnych sygnałów OKK z rys. 5.22b, jednego reprezentującego binarne 1, a drugiego binarne 0. Jego widmo przedstawiono na rys. 5.23. Obie częstotliwości nośne muszą być dostatecznie odległe od siebie, aby uniknąć zachodzenia na siebie widm obu składowych OKK. Nakłada to ograniczenie maksymalnej szybkości modulacji fali nośnej. Zastosowanie systemu FSK ogranicza się więc do mniejszych szybkości modulacji, w przeciwieństwie do przedstawionych dalej technik modulacji fazy. Sygnał FSK zajmuje przy tym co najmniej dwa razy szersze pasmo, niż analogiczny sygnał ASK.

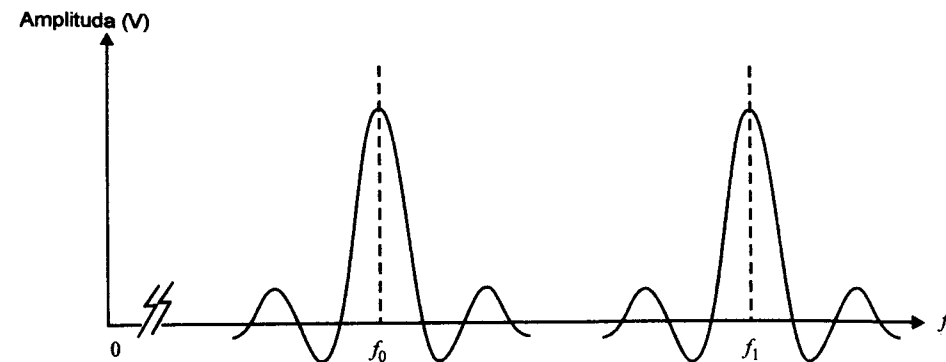
Ćwiczenie sprawdzające 5.4 Modem wykorzystuje modulację BFSK. Oszacować minimalną wymaganą szerokość pasma, jeśli szybkość transmisji danych wynosi 1000 bit/s. Sformułować odpowiednie założenia.

Detekcja sygnału FSK może być koherentna lub niekoherentna. Rozpatrując sygnał FSK jako dwa sygnały OKK, każdy o innej częstotliwości nośnej jest oczywiste, że demodulacji sygnału FSK można dokonywać za pomocą prostego detektora obwiedni. Powróćmy do rys. 5.23. Każdą częstotliwość nośną i odpowiadający jej sygnał OKK można wybrać za pomocą filtra środkowoprzepustowego, jak na rys. 5.24. Sygnał wyjściowy każdego z filtrów jest sygnałem OKK skupionym wokół swej częstotliwości nośnej. Sygnał OKK dla binarnego 0 wytwarza 1 na wyjściu odpowiedniego filtra i detektora obwiedni. Podobnie sygnał dla binarnego 1 wytwarza 1 na wyjściu związanego z nim detektora. Gdy wyjście detektora binarnego 0 odwrócić i zsumować z wyjściem detektora binarnego 1, otrzymamy oryginalny sygnał binarny.

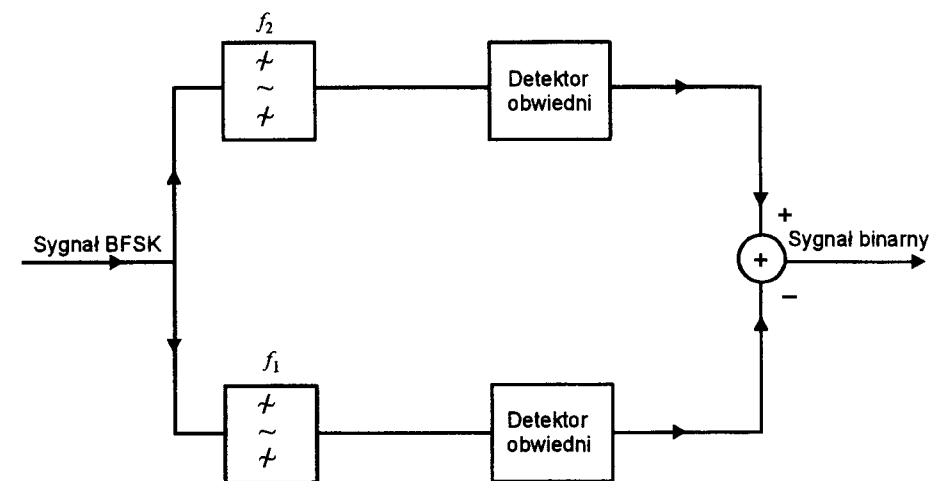
Istnieje wiele innych niekoherentnych metod detekcji sygnału FSK, takich jak dyskryminacja częstotliwości, detekcja przejść przez zero i metoda pętli fazowej.



Rys. 5.22 Kluczowanie z przesuwem częstotliwości: a – sygnał; b – równoważne sygnały OKK



Rys. 5.23 Widmo sygnału FSK (jednostronne)

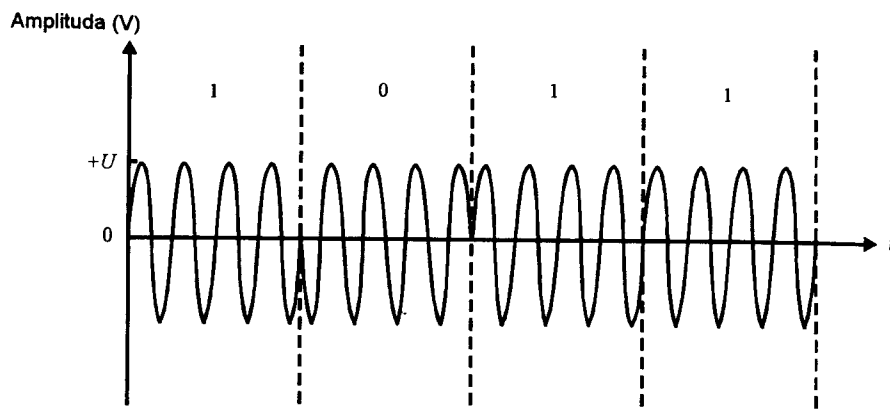


Rys. 5.24 Odbiór FSK (niekoherentny)

Właściwości szumowe systemu można poprawić używając detekcji koherentnej za cenę wzrostu złożoności i kosztu układu. Wzrost złożoności wynika z istnienia dwu częstotliwości nośnych w sygnale BFSK. Potrzebne są więc dwa stopnie demodulatora dla odzyskiwania dwu fal nośnych tak, jak przy detekcji niekoherentnej, gdzie potrzebne są jak pokazaliśmy dwa detektory dla sygnałów 0 i 1. Odbiornik koherentny jest więc podobny do pokazanego na rys. 5.24, gdzie detektory obwiedni należy tylko zastąpić przez multiplikatory i dodatkowe układy dla odzyskiwania fal nośnych.

5.4.3 Kluczowanie z przesuwem fazy (PSK)

Zacznijmy od binarnego kluczowania z przesuwem fazy **BPSK**, kiedy cyfrowy sygnał binarny powoduje, że nadawany jest jeden z dwu kątów fazowych, zwykle odległych od siebie o π radianów, jak na rys. 5.25. W tym przykładzie binarne 1 jest związane z fazą 0, a binarne 0 z fazą π .



Rys. 5.25 Binarne kluczkowanie z przesuwem fazy

Proces BPSK można rozpatrywać jako przełączanie dwu identycznych sygnałów sinusoidalnych o przeciwnych fazach. Matematyczna reprezentacja sygnału BPSK jest następująca:

$$g(t) = m(t) \sin 2\pi f_c t + [1 - m(t)] (-\sin 2\pi f_c t) \quad (5.93)$$

gdzie, jak uprzednio, $m(t)$ – sygnał modulujący, przyjmujący w przypadku BPSK wartość 1 lub 0 w każdym momencie czasu. Po przekształceniu wzoru (5.93) uzyskujemy:

$$g(t) = 2m(t) \sin 2\pi f_c t - \sin 2\pi f_c t \quad (5.94)$$

Porównując wzory (5.94) i (5.91) stwierdzamy, iż sygnał PSK ma podobne widmo co sygnał OOK plus składowa o częstotliwości nośnej. Takie widmo przypomina więc widmo pełnej fali AM.

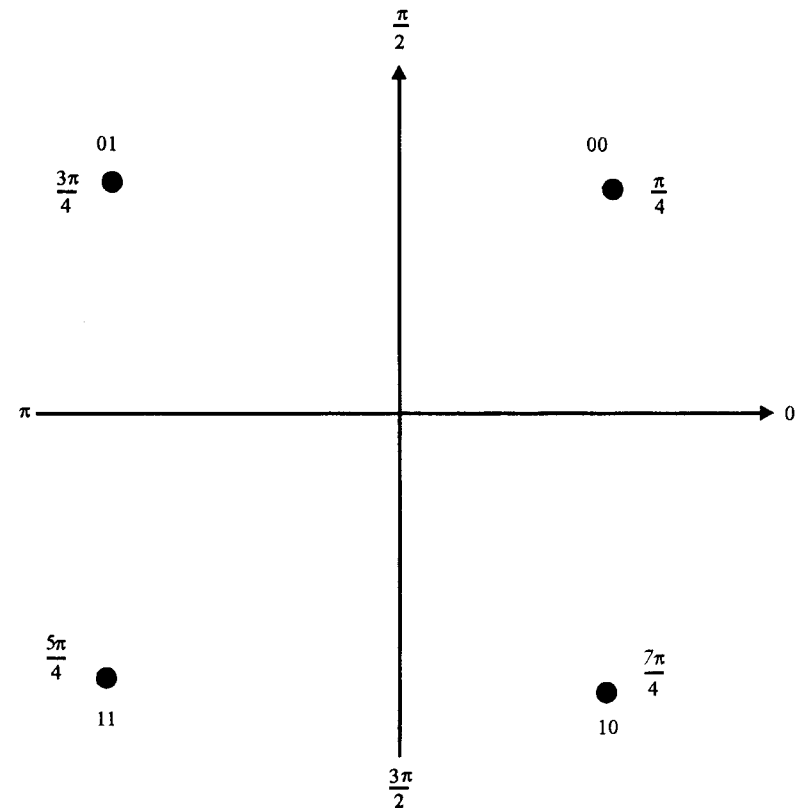
Sygnał BPSK ma zarówno stałą obwiednię, co jest też zaletą sygnału FSK, jak i zredukowaną szerokość pasma jaką ma sygnał ASK. Sygnał BPSK jest dlatego efektywny pod względem widmowym i jak pokazemy w punkcie 5.45 ma lepsze właściwości szumowe od ASK i FSK. Wybierając system BPSK musimy jednak pogodzić się z faktem, iż w odróżnieniu od ASK i FSK nie poddaje się on detekcji niekoherentnej.

Różnicowe kluczkowanie z przesuwem fazy (DPSK) nie wymaga stosowania detekcji koherentnej, koniecznej w systemach PSK. W najprostszej postaci systemu DPSK binarne 1 powoduje przesunięcie fazy o π , a binarne 0 nie powoduje przesunięcia fazy lub vice versa. W odbiorniku faza każdego symbolu jest porównywana z fazą symbolu poprzedniego, co powoduje konieczność znalezienia metody opóźniania odbieranego sygnału w czasie o jeden symbol. Zmiana fazy pokazuje że nadano 1, a brak zmiany fazy oznacza, że nadano 0. Pod względem widma zmodulowany binarnie sygnał DPSK jest podobny do sygnału BPSK.

Trudność mogąca się pojawić przy stosowaniu technik różnicowych polega na tym, iż długi ciąg zer oznacza wysyłanie sygnału o ciągłej fazie przez długi czas. Odbiornik jest w stanie dokonać prawidłowej detekcji sygnału i dać na wyjściu właściwy

stan binarny. Brak symbolu ani zmian odbieranego sygnału oznacza, że odbiornik nie jest w stanie odtworzyć sygnału zegarowego na podstawie sygnału przychodzącego. Zegar odbiornika dozna wówczas na ogół dryftu od pozycji optymalnej. Gdy zmiana stanu danych pojawi się następnie w odbiorniku, trzeba będzie pewnego czasu, aby zegar ustawił się właściwie. Zdarza się to tylko gdy znajdzie dostateczna liczba zmian stanu, aby odpowiedni układ przywrócił synchronizm zegara. Przez ten czas dane wychodzące z odbiornika nie są poprawnie zsynchronizowane i mogą spowodować błędy w dalszych urządzeniach systemu. Aby pokonać opisany problem, w modemach stosuje się zwykle randomizację danych przed modulacją w nadajniku, za pomocą skramblera. Mamy wówczas pewność, że żaden symbol nie będzie już nadawany w sposób ciągły przez dłuższy czas.

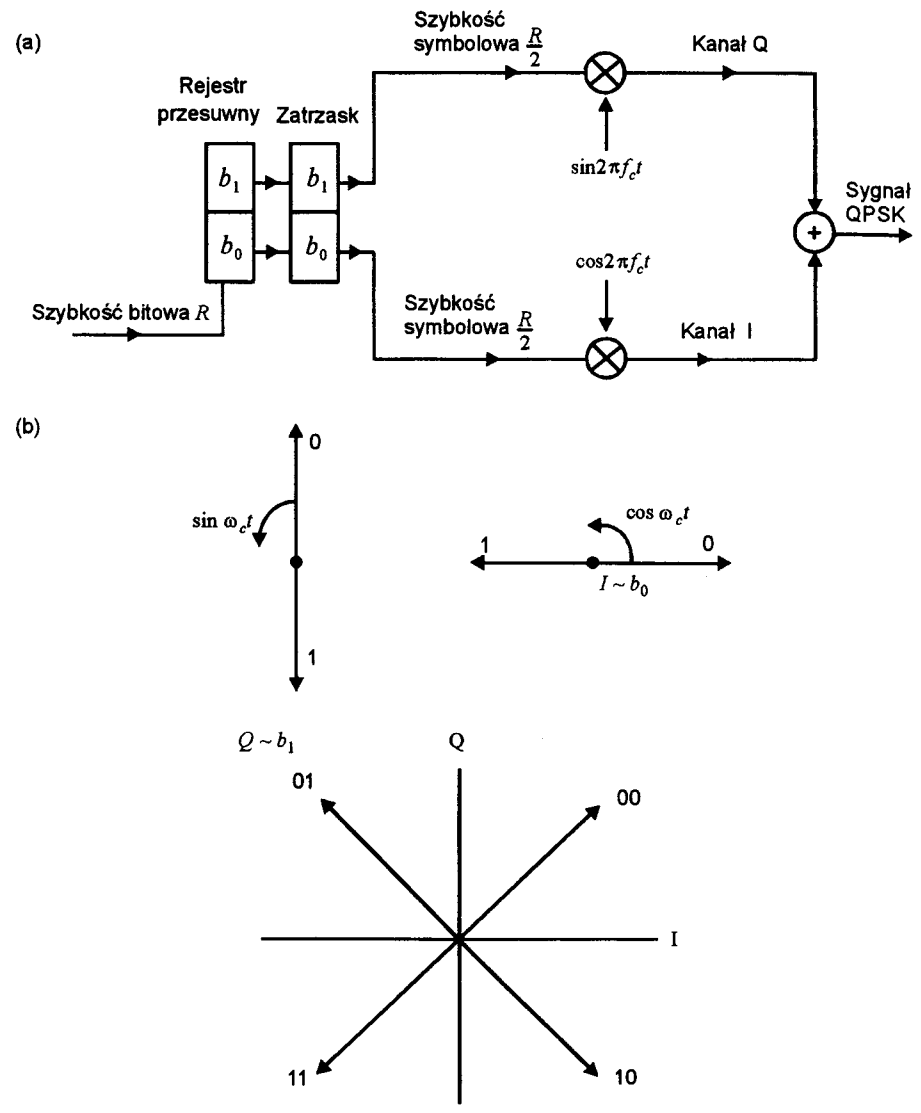
Wszystkie omówione dotychczas metody modulacji cyfrowej, a więc ASK, FSK i BPSK, są to systemy binarne. Sygnał modulujący jest dwustanowy, a więc i sygnał zmodulowany zawiera tylko dwa symbole. Nie ma jednak zasadniczego powodu, dla którego na wyjściu modulatora nie miała by występować większa liczba symboli. Systemy tego rodzaju są nazywane systemami **M-wartościowymi**, gdzie M jest liczbą możliwych symboli. Weźmy pod uwagę system PSK o czterech wartościach fazy odległych o $\pi/2$. Taki system o czterech symbolach wymaga, aby dane binarne były brane po dwa bity (jeden dwubit) na raz, dla utworzenia każdego z czterech możliwych



Rys. 5.26 Konstelacja sygnałowa QPSK

symboli. Oznacza to, że każdy symbol reprezentowany jest przez jeden z czterech dwubitów. System ten znany jest pod nazwą **kwadraturowego systemu PSK** lub **QPSK**. Bardziej złożone systemy *M*-wartościowe są często przedstawiane za pomocą tak zwanej **konstelacji sygnałowej**, której przykładem jest rys. 5.26.

Na rysunku 5.27a zilustrowano, jak konstelacja sygnałowa systemu QPSK z rys. 5.26 jest tworzona w nadajniku. Wyjście dwubitowego rejestru przesunego zostaje zatrzymywane (ang. *latched*) co dwa bity. Bity b_1 i b_0 pełnią rolę sygnałów modulujących, mnożonych dalej przez odpowiednie sygnały nośne. Szybkość symbolowa wynosi tutaj połowę szybkości transmisji danych binarnych. Dlatego wyjściowy sygnał QPSK też pracuje z dwa razy mniejszą szybkością transmisji. Dwie fale nośne są względem siebie



Rys. 5.27 Generacja sygnału QPSK: a – schemat blokowy; b – kanały I oraz Q

w kwadraturze (przesunięte między sobą w fazie o $\pi/2$), skąd termin „kwadraturowa” w odniesieniu do omawianej formy modulacji. Kosinusoidalna fala nośna jest nazywana falą synfazową (I), a sinusoidalna jest zwana falą kwadraturową (Q). Oba te sygnały, I oraz Q, tworzą parę sygnałów ASK lub BPSK, będącą w kwadraturze. Na rysunku 5.27b pokazano konstelację sygnałową w tym ujęciu. Jest oczywiste, że sygnały I i Q mogą być uważane jako sygnały BPSK. Oba te sygnały, I oraz Q, są następnie sumowane, tworząc jeden sygnał QPSK.

Zastosowanie kwadraturowych fal nośnych oznacza, że każdy sygnał BPSK jest **ortogonalny**. Jedną z cech takich sygnałów jest możliwość współistnienia bez interferencji wzajemnej. W efekcie, jeśli tylko kanał nie wprowadza zniekształceń fazowych, mogących naruszyć ortogonalność każdego z sygnałów BPSK zawartych w odbieranym sygnale QPSK, sygnały te mogą być odtwarzane za pomocą detekcji koherentnej z użyciem pary kwadraturowych fal nośnych.

Atrakcyjność systemu QPSK wiąże się z sumowaniem widm dwu sygnałów BPSK, gdzie otrzymywana szerokość pasma pozostaje taka sama, jak dla pojedynczego sygnału BPSK. Oznacza to, że kanał o danej szerokości pasma może transmitować dane w systemie QPSK z szybkością dwa razy większą, niż w systemie BPSK. Przy tej samej szybkości transmisji, system QPSK pracuje przy dwa razy mniejszej szybkości modulacji w porównaniu z BPSK i pasmo zmniejsza się o połowę. Ilustruje to jedną z zalet systemów *M*-wartościowych. W praktyce występuje pewne pogorszenie stopy błędu BER, w porównaniu z sygnałami BPSK i DPSK, przy tej samej szybkości transmisji i amplitudzie sygnału. Dzieje się tak, gdyż punkty konstelacji sygnałowej sygnału QPSK leżą bliżej siebie i dlatego mniejsze napięcie szumów jest już w stanie spowodować błąd w odbiorze symbolu, zmieniając go na inny. QPSK, tak jak BPSK, może być realizowany w systemie różnicowym, co eliminuje konieczność odtwarzania fali nośnej w odbiorniku.

ĆWICZENIE 5.6

Wyprowadzić zależność szybkości transmisji danych *D*, szybkości symbolowej *R* oraz liczby symboli *M* w systemie *M*-wartościowym.

ROZWIĄZANIE

$$D = R \cdot n \tag{5.95}$$

gdzie *n* – liczba bitów na symbol. Mamy związki:

$$M = 2^n \tag{5.96}$$

$$n = \log_2 M \tag{5.97}$$

Podstawiając wzór (5.97) do (5.95) uzyskujemy wynik:

$$D = R \cdot \log_2 M \tag{5.98}$$

Modulacja fazy nie musi być ograniczona do systemu czteropunktowego. *M* musi być oczywiście liczbą całkowitą, a ze wzoru (5.96) wynika, iż można przyjąć 8, 16 lub więcej wartości fazy. Niezależnie od *M*, konstelacja sygnałowa systemu PSK składa się z punktów równomiernie rozmieszczonych na okręgu (gdyż wszystkie

symbole mają takie same amplitudy). Dla przykładu, system ośmiofazowy ma osiem punktów odległych od siebie o $\pi/4$. Gdy moc sygnału nie zostanie zwiększona przy zwiększeniu liczby punktów konstelacji sygnałowej, amplituda każdego symbolu (promień okręgu, na którym punkty leżą) również pozostaje stała. Oznacza to, iż odstęp między punktami, a szczególnie sąsiednimi, stopniowo maleje wraz ze wzrostem M . Systemy PSK wyższego rzędu są więc bardziej podatne na szumy, zniekształcenia i zakłócenia, co wymaga większej rozdzielczości przy rozróżnianiu fazy w odbiorniku.

Ćwiczenie sprawdzające 5.5

- Narysować odpowiednią konstelację sygnałową dla 16-punktowego modulatora PSK. Wyjaśnić, jak bity danych mogą być odwzorowane na tę konstelację, przy ortogonalnych falach nośnych.
- Przy szybkości symbolowej 4800 bodów określić szybkość transmisji liczoną w bitach na sekundę.

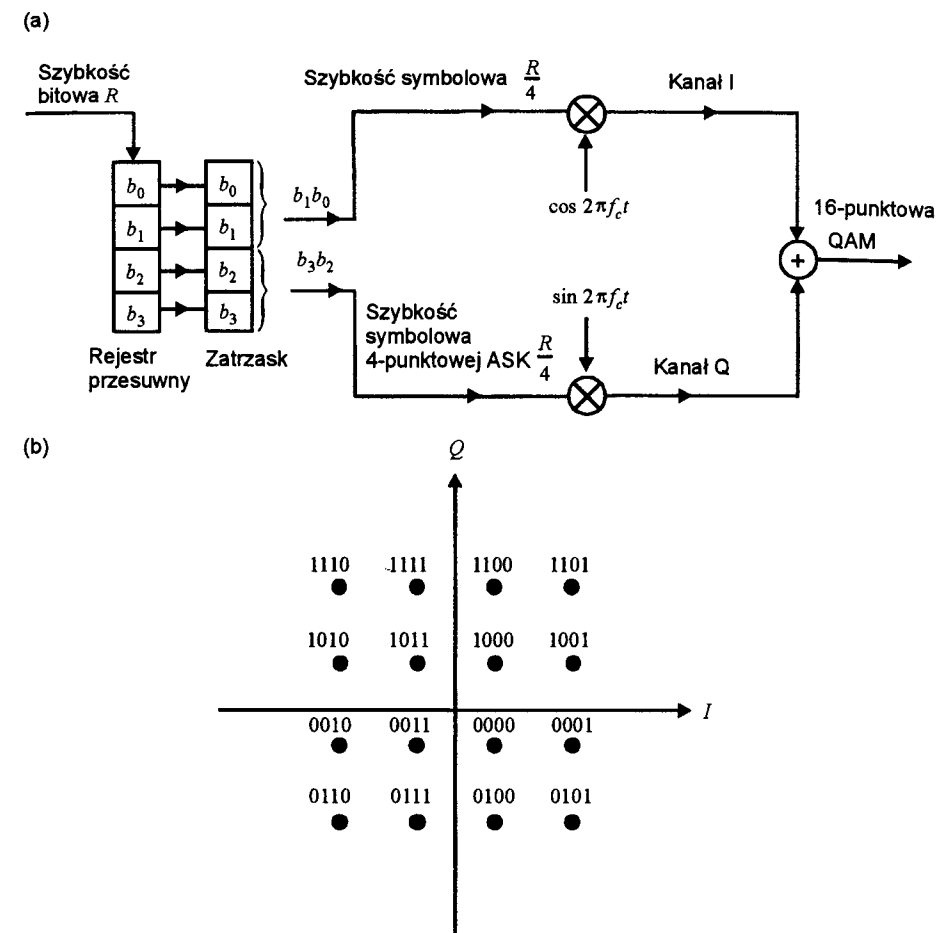
5.4.4 Kwadraturowa modulacja amplitudy (QAM)

W systemie QAM, jak sama nazwa wskazuje, też wykorzystuje się kwadraturowe fale nośne. W odróżnieniu jednak od QPSK gdzie każdy kanał kwadraturowy jest modulowany sygnałem binarnym, system QAM jest M -wartościowy w odniesieniu do obu kanałów, synfazowego I oraz kwadraturowego Q. Sygnał QAM najlepiej zilustrować na przykładzie. Weźmy pod uwagę 16-punktową konstelację QAM. Można ją otrzymać za pomocą dwu 4-punktowych sygnałów ASK jak na rys. 5.28b, gdzie każdy punkt danych zawiera dwie pary bitów. Oznacza to, iż dwubity b_1 i b_0 modulują synfazową falę nośną, a dwubity b_3 i b_2 kwadraturową falę nośną. Każdy dwubit musi być zatem przetworzony na jedno z czterech możliwych napięć sygnału ASK o odpowiedniej fali nośnej. Otrzymaną tym sposobem konstelację sygnałową pokazano na rys. 5.28b.

Ćwiczenie sprawdzające 5.6. Narysować konstelacje sygnałowe I, Q oraz QAM podobnie, jak to zrobiono na rys. 5.27b dla sygnału QPSK, dla 16-punktowego systemu QAM. Na tej podstawie pokazać, jak powstaje konstelacja z rys. 5.28b.

W systemie QAM wykorzystanie przestrzeni sygnałowej jest bardziej efektywne, niż w systemie PSK, gdyż jej poszczególne punkty nie leżą już na okręgu, co zwiększa odległości pomiędzy sąsiednimi punktami sygnałowymi. Daje to lepsze właściwości szumowe bez uciekania się do wzrostu złożoności systemu. W praktyce, zamiast prostokątnego rozkładu punktów konstelacji z rys. 5.18, spotyka się wiele rozmaitych rozkładów, w zależności od przyjętego zbioru punktów fazowych, charakterystyk stosunku sygnał-szum oraz charakterystyk stosowanego kanału. Sygnał QAM stanowi sumę dwu ortogonalnych sygnałów ASK. Jego szerokość pasma jest więc taka sama, jak pojedynczego sygnału ASK. Znajac widmo pojedynczego sygnału ASK można więc stwierdzić, że dwa takie sygnały zajmują tę samą szerokość pasma.

Ćwiczenie sprawdzające 5.7. Modem wykorzystuje modulację QAM o 64-punktowej konstelacji sygnałowej. Naszkicować odpowiednią konstelację sygnałową. Dla szybkości symbolowej 1200 bodów wyznaczyć szybkość transmisji danych.



Rys. 5.28 15. punktowy sygnał QAM: a – modulator; b – konstelacja sygnałowa

5.4.5 Wpływ szumów na sygnały modulowane cyfrowo

Jak wiemy, w przypadku sygnałów cyfrowych z pasma podstawowego, pojawienie się szumu w czasie transmisji zwiększa prawdopodobieństwo błędu przy odbiorze. Podobnie jest przy transmisji sygnałów modulowanych cyfrowo, gdzie szum powoduje błędną detekcję w odbiorniku.

Jak można pokazać, bitowa stopa błędów BER detekcji koherentnej jest określona zależnością:

$$P_e = 0,5 \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{k \frac{S}{N}} \right) \quad (5.99)$$

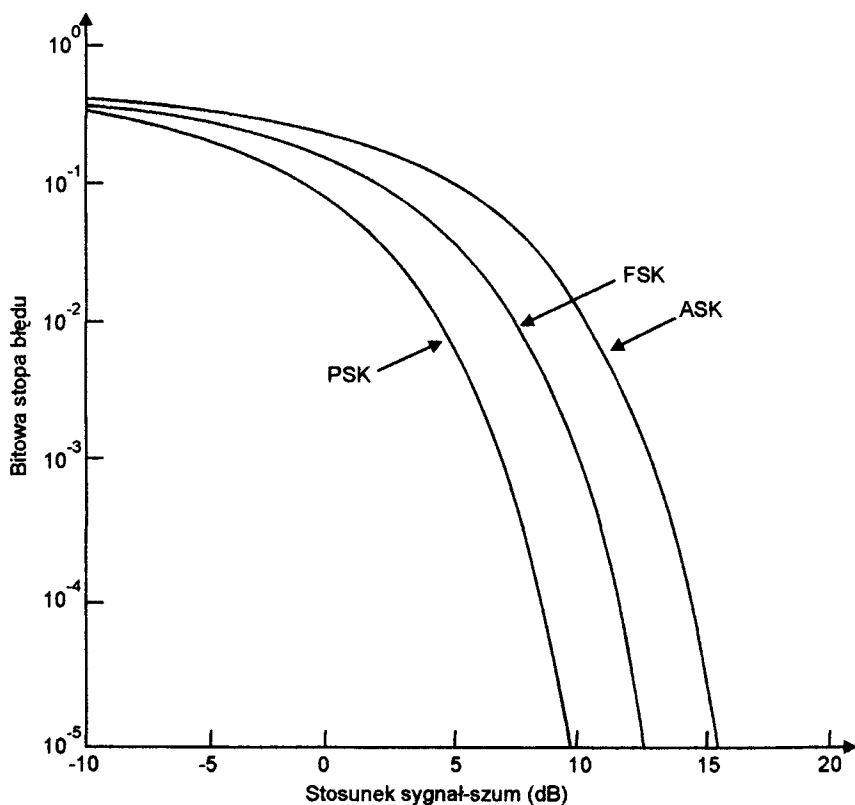
gdzie odpowiednie wartości k są podane w tablicy 5.1.

Tablica 5.1 PORÓWNANIE MODULACJI KOHERENTNYCH

Typ modulacji (koherentnej)	k
ASK	0,25
FSK	0,5
PSK	1

Wynika stąd, iż przy zadanej BER, system FSK wymaga dodatkowych 3 dB stosunku sygnał-szum w porównaniu z PSK. Podobnie, system ASK wymaga dalszych 3 dB, aby dorównał pod względem BER systemowi FSK. Na wykresach z rys. 5.29 podano obliczoną zależność bitowej stopy błęd BER od stosunku sygnał-szum S/N , z której jasno wynika, że system PSK zapewnia najniższą stopę błęd BER przy zadanym stosunku S/N .

Pełna analiza rozmaitych systemów modulacji, koherentnych i niekoherentnych, znajduje się w rozdziale 11 książki Rodena⁷⁾. W przypadku odbioru niekoherentnego wymagany do uzyskania tej samej stopy błęd BER stosunek sygnał-szum jest o kilka dB większy, niż dla odbioru koherentnego. Można więc dokonać kompromisu między mocą nadawaną i złożonością odbiornika, a w szczególności zdecydować się na odbiór



Rys. 5.29 Bitowa stopa błęd w funkcji stosunku S/N (detekcja koherentna)

⁷⁾ Roden, M.S., *Analog and Digital Communication Systems*, wyd. 4, Prentice Hall, 1996. ISBN 0-13-399965-3.

niekoherentny lub koherentny, którego złożoność jest związana z odzyskiwaniem fali nośnej.

System PSK z zasady działa w sposób koherentny, a jego złożoność związana z wymaganą fazą odniesienia w odbiorniku jest usprawiedliwiona jedynie w warunkach koniecznej maksymalizacji stopy błęd BER. Do wyjątków należy niekoherentny system DPSK, mający jednak gorsze właściwości przy danym stosunku sygnał-szum.

M -wartościowy system M -PSK jest podobny do systemu BPSK, lecz energia dzieli się tu równomiernie pomiędzy M symboli zamiast dwu. Oznacza to, iż dysponowalna moc sygnału liczona na jeden symbol zostaje zredukowana w stosunku $\log_2 M$. Odpowiednio zmodyfikowane wyrażenie aproksymujące BER systemu M -PSK ma postać:

$$P_e \approx 0,5 \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{S}{N} \frac{1}{\log_2 M}} \right) \quad (5.100)$$

Przy tej samej BER co dla BPSK, wymagany stosunek S/N trzeba zwiększać o 3 dB przy każdym podwojeniu liczby punktów konstelacji sygnałowej.

Sygnał QAM może być, jak już wspomniano, rozpatrywany jako dwa koherentne sygnały ASK przesyłane za pomocą fal nośnych w kwadraturze. W przypadku czteropunktowej konstelacji sygnałowej jest on podobny do pary binarnych sygnałów ASK i dlatego zwiększenie wymaganego S/N przy tej samej BER wynosi 3 dB. Gdy jednak, jak się częściej stosuje, M jest większe od 4, możliwe jest polepszenie BER, w porównaniu z równoważnym sygnałem M -PSK. Przy takiej samej liczbie punktów sygnałowych, odległości między „sąsiednimi” punktami są w przypadku sygnału QAM większe, niż dla sygnału PSK. W wyniku tego trzeba większej amplitudy szumu by dany symbol (i tworzące go bity) był nieprawidłowo zinterpretowany w odbiorniku. Dlatego znacznie liczniejsze konstelacje sygnału QAM dają lepszą BER w porównaniu z sygnałem PSK.

5.4.6 Porównanie cyfrowych technik modulacji

Tablica 5.2 zawiera szerokości pasma wymagane dla różnych typów modulacji i porównanie ich jakości pod względem BER dla stałego stosunku S/N . R oznacza jak poprzednio szybkość bitową.

5.5 PODSUMOWANIE

Częstotliwość Nyquista oznacza, że sygnał cyfrowy wymaga minimalnej szerokości pasma równej połowie szybkości symbolowej. Ograniczenie pasma sygnałów cyfrowych z pasma podstawowego powoduje rozciągnięcie sygnału w czasie, co prowadzi do powstania interferencji międzysymbolowej ISI. Wpływ ISI można ocenić w sposób jakościowy za pomocą wykresu oczkowego. Dla zmniejszenia wpływu ISI należy zmodyfikować wypadkową charakterystykę kanału, stosując odpowiednią korekcję.

Obecność szumu w sygnale cyfrowym powoduje błędy w odbiorniku, których prawdopodobieństwo występowania szacuje się podając bitową stopę błęd (BER). Do

Tablica 5.2 PORÓWNANIE RÓŻNYCH TECHNIK MODULACJI

Rodzaj modulacji	Szerokość pasma	Detekcja	Właściwości
ASK	$\approx 3R$	Koherentna	Podobne do koherentnej PSK, która ma lepszą BER. Dlatego rzadko używana
		Niekoherentna	Gorsza BER. Prosty detektor
FSK	$> 3R$	Koherentna	Podobne do koherentnej PSK, która ma lepszą BER. Mniej efektywna widmowo. Rzadko używana
		Niekoherentna	Lepsza BER w porównaniu z ASK
PSK	$\approx 3R$	Koherentna	Lepsza BER w porównaniu z ASK i FSK. Efektywna widmowo.
DPSK	$\approx 3R$		Mniej skomplikowany detektor, niż dla PSK, nieco gorsza BER
QAM	$\approx 3R$		Bardziej efektywne konstelacje sygnałowe dają większą odporność na szumy. Lepsza BER w porównaniu PSK

obliczania BER przy zadanej amplitudzie sygnału i szumie gaussowskim stosuje się funkcję błędu. Pojemność kanału określa maksymalną możliwą szybkość transmisji przez kanał o zadanej szerokości pasma i znanym stosunku sygnał-szum. Metoda TDM służy dla zwielokrotniania pewnej liczby sygnałów cyfrowych, celem efektywniejszego wykorzystania danej szerokości pasma kanału.

Szeroko stosuje się system PCM, dawniej celem powiększenia liczby kanałów telefonicznych transmitowanych za pomocą pary przewodów, a następnie już jako pierwszy etap w tworzeniu systemów PCM wyższych rzędów. PCM opiera się na procesie kwantowania, któremu zawsze towarzyszy błąd próbkowania znany pod nazwą błędu kwantowania. Prowadzi to do koncepcji stosunku sygnału do szumu kwantowania, będącego podstawową miarą jakości systemu PCM. PCM jest przykładem systemu z rozszerzaniem pasma, oferującego lepszy stosunek sygnał-szum za cenę powiększenia szerokości pasma.

Zastosowanie kodowania nieliniowego lub komandera ma na celu zachowanie stosunku sygnał-szum przy mniejszej szerokości pasma, za pomocą kompresji silniejszych sygnałów. ASK, FSK, PSK i QAM są szeroko stosowanymi metodami modulacji sygnałów cyfrowych. Umożliwiają one wykorzystanie istniejącej sieci telefonicznej do celów teleinformatycznych oraz kanałów radiowych i światłowodowych, które nie są zdolne do bezpośredniej transmisji sygnałów cyfrowych na częstotliwościach pasma podstawowego.

Zadania

- 5.1. Typowe łącze PSTN służące do przesyłania sygnałów FSK ma pasmo 3000 Hz i stosunek S/N równy 20 dB. Wyznaczyć pojemność kanału.
- 5.2. Rozpatrujemy transmisję sygnałów telefonicznych w systemie PCM. Przyjmując, że siła głosu poszczególnych rozmówców jest zmienna, wyjaśnić zalety kodowania nieliniowego.

- 5.3. System PCM służy do przesyłania sygnałów akustycznych wysokiej jakości w zakresie częstotliwości od 0 do 20 KHz. Porównać względne wartości stosunku sygnału do szumu kwantowania (S/N_q), pasma oraz współczynnika powiększenia pasma w stosunku do transmisji analogowej w pasmie podstawowym przy próbkowaniu 8- oraz 12-bitowym.
- 5.4. Wyjaśnić różnicę między jednostkami: bit/s i bod.
- 5.5. W modemie zastosowano 16-fazową konstelację sygnałową QAM. Przyjmując transmisję danych z szybkością 2400 bit/s, wyznaczyć szybkość symbolową i liczbę bitów przesyłanych na symbol.
- 5.6. Wyjaśnić, co rozumiemy pod następującym stwierdzeniem: QPSK można rozpatrywać jako dwa sygnały ASK modulujące odpowiednio jedną z kwadraturowych fal nośnych.

Literatura

Betts, J.A., *Signal Processing, Modulation and Noise*, The English Universities Press, 1970. ISBN 0-340-09895-3.
Bylanski, P., Ingram, D.G.W., *Digital Transmission Systems*, wyd. 2, Peter Peregrinus, 1980, ISBN 0-906048-42-7.
Duck, M., Bishop, P., Read, R., *Data Communications for Engineers*, Addison-Wesley, 1996. ISBN 0-201-42788-5.
Glover, I.A., Grant, P.M., *Digital Communications*, Prentice Hall, 1997. ISBN 0-13-565391-6.
Marshall, G.M., *Principles of Digital Communications*, McGraw-Hill, 1980. ISBN 0-07-084096-2.
Roden, M.S., *Analog and Digital Communication Systems*, wyd. 4, Prentice Hall, 1996. ISBN 0-13-399965-3.
Schwartz, M., *Information Transmission, Modulation and Noise*, wyd. 4, McGraw-Hill, 1990. ISBN 0-07-100931-0.
Stremmer, F.G., *Introduction to Communications Systems*, wyd. 3, Addison-Wesley, 1990. ISBN 0-201-51651-0.
Zeimer, R.E., *Principles of Communications*, wyd. 4, John Wiley & Sons, 1995. ISBN 0-471-12496-6-3.

Rozdział 2

Ćwiczenia sprawdzające

2.1

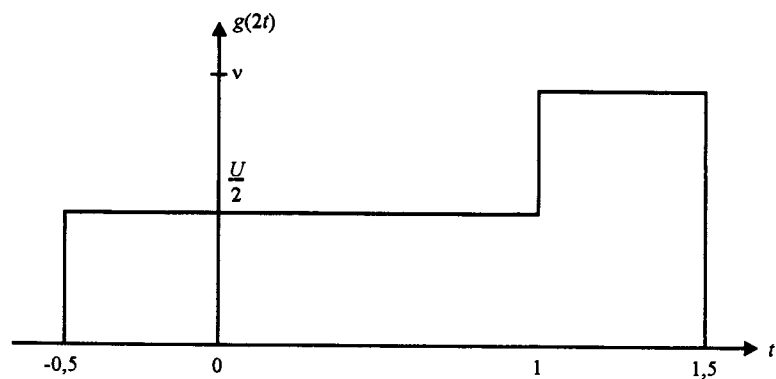
$$g(t) = \frac{U}{2} + \frac{2U}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi t}{T} + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi t}{T} + \dots \right)$$

2.2

$$g(t) = \frac{U}{2} + \frac{U}{\pi} \left(\sin \frac{\pi t}{20} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi t}{10} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{20} - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi t}{4} + \dots \right)$$

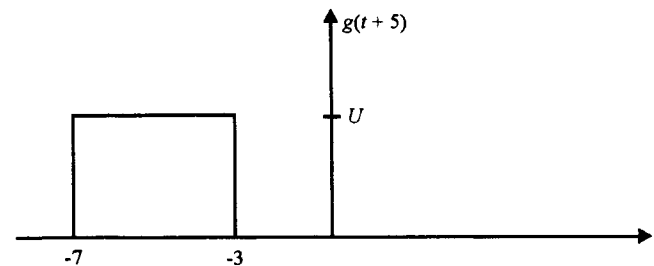
2.3 $\text{Sa} f e^{-j2\pi f t_d}$

2.4 $T = 0,5$



2.5

a)

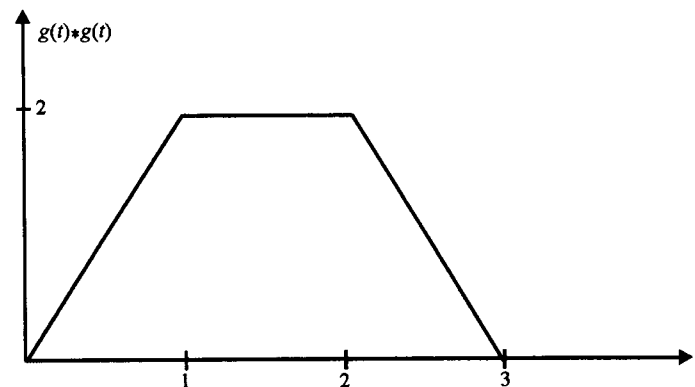


b) $4U \text{Sa} 4\pi f e^{j10\pi f}$

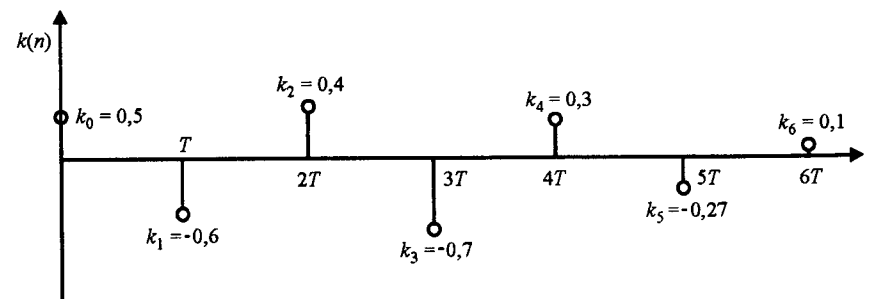
2.6

$20U \text{Sa} 20\pi f e^{j6\pi f}$

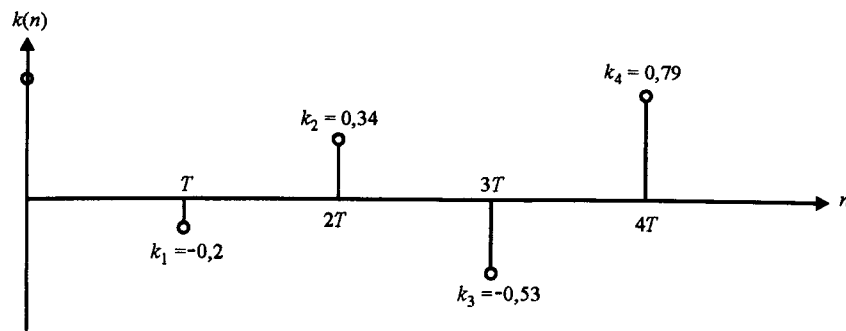
2.7



2.8



2.9



Zadania

- 2.1 a) i) Parzysty; ii) brak symetrii; iii) Parzysty.
b) i)

$$g(t) = \frac{U}{2} + \frac{4U}{\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{6\pi t}{T} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{10\pi t}{T} + \dots \right)$$

ii)

$$g(t) = \frac{U}{4} + \frac{2U}{\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{9} \cos \frac{6\pi t}{T} + \frac{1}{25} \cos \frac{10\pi t}{T} + \dots \right) + \left(\sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi t}{T} - \frac{1}{4} \sin \frac{8\pi t}{T} + \dots \right)$$

iii)

$$\frac{U}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{2}{1,3} \cos \frac{4\pi t}{T} - \frac{2}{5,3} \cos \frac{8\pi t}{T} + \frac{2}{5,7} \cos \frac{12\pi t}{T} - \dots \right)$$

2.3 $e^{-j2\pi fT} \text{Sa} f + e^{j2\pi fT} \text{Sa} f$

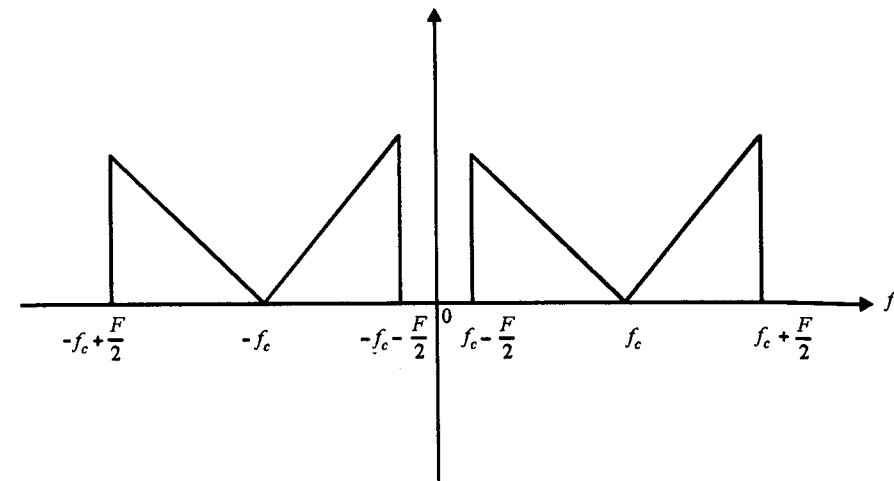
2.4 $\frac{2}{1 + (2\pi f)^2}$

2.5

i) $\left| \frac{1}{F} \right| \cdot g(Ft)$

ii) $\left[\frac{F}{2} \text{Sa} \left(f \frac{F}{2} \right) \right]^2$

2.7



Rozdział 3

Ćwiczenia sprawdzające

- 3.1 48,3 K.
3.2 a) 900 K; b) 0,033 pW; c) 0,025 pW.
3.3 a) 100; b) 4 mW, 100 mW; c) 0,4 W, 16 W.
3.4 a) 4811 pW; b) 4799 pW.

Zadania

- 3.1 $e_{TH} = \sqrt{4kB(R_1T_1 + R_2T_2)}$, $R_{TH} = R_1 + R_2$
3.2 0,3 W; 0,0017 pW.
3.4 a) 900 K; b) 1,66 pW, 414 pW; c) 601 nW.
3.5 Moc sygnału: 1 mW, 100 mW, 1,59 W. Moc szumu: 1 mW, 15,9 mW, 100 mW.
3.6 a) 379 pW; b) 2,62 nW; c) ≈ 8 ; d) 1440°C.
3.8 a) 1,014; b) 120 K; c) 1,058; d) 36,82 K.

Rozdział 4

Ćwiczenia sprawdzające

- 4.2 a) 0,4; b) 5 V; c) 4 V.

<i>m</i>	<i>Moc wstęp bocznych (%)</i>	<i>Moc fali nośnej (%)</i>
0	0	100
0,1	≈ 0	99,5
0,2	2	98,0
0,3	4,3	95,7
0,4	7,4	92,6
0,5	11,1	88,9
0,6	15,3	84,7
0,7	19,7	80,3
0,8	24,2	75,8
0,9	28,8	71,2
1,0	33,3	66,7

4.4 9,1 nF.

Zadania

4.4 a) 1; b) 1000 Hz; c) 0,33 μs; d) 20 V; e) 2 kHz.

4.5 0,32.

4.6 1,08 W.

4.7 303 W, 9697 W.

4.11 a) 6,7; b) 230 kHz; c) 300 kHz < W < 330 kHz

Rozdział 5**Ćwiczenia sprawdzające**

5.1 0,9 V.

5.3 b) 48,2 dB.

5.4 6 kHz.

5.5 b) 19,2 kbit/s.

Zadania

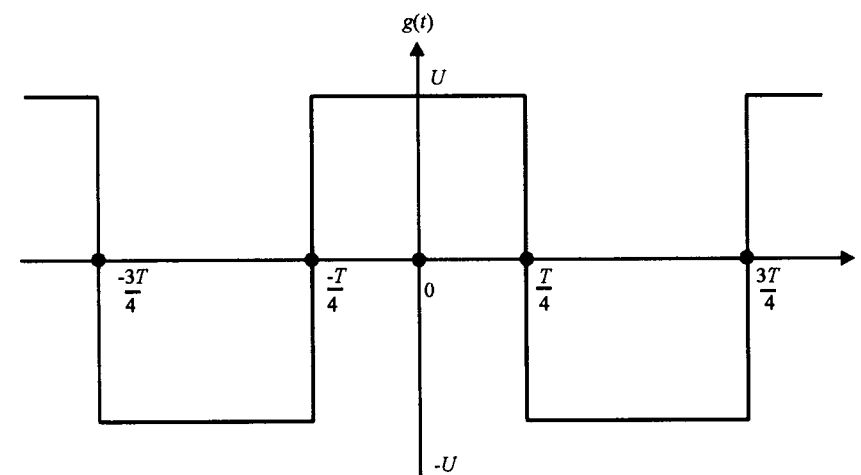
5.1 19 963 bit/s.

5.3

	8 bitów	12 bitów	Analogowy
<i>S/N</i>	3M ² = 52,9 dB	89 dB	<i>S/N</i> 20 ÷ 30 dB typ.
Szerokość pasma	160 kHz	240 kHz	20 kHz
Rozszerzenie pasma	8	2	–

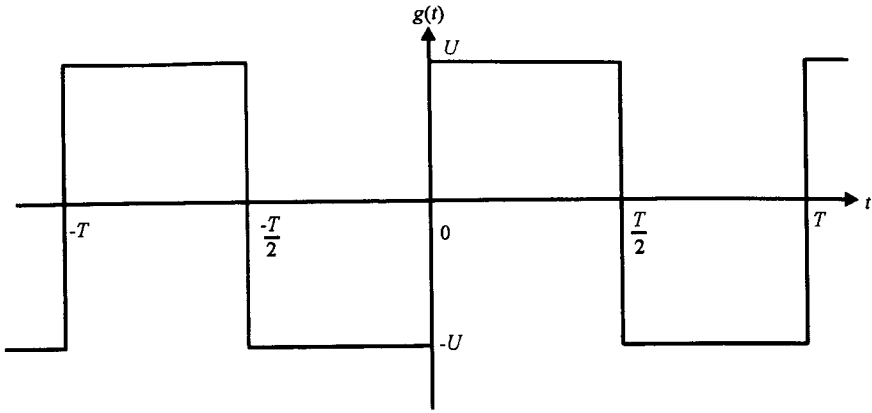
5.5 600 bodów, 4.

Rozwinięcia w szereg podanych dalej przebiegów okresowych są wyrażone w funkcji ω , przy czym $\omega = 2\pi/T$.

B.1 Fala prostokątna – symetria parzysta

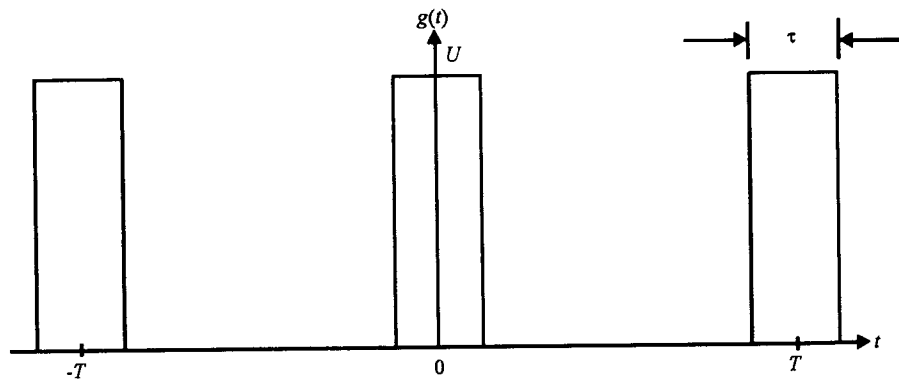
$$g(t) = \frac{4U}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \dots \right)$$

B.2 Fala prostokątna – symetria nieparzysta



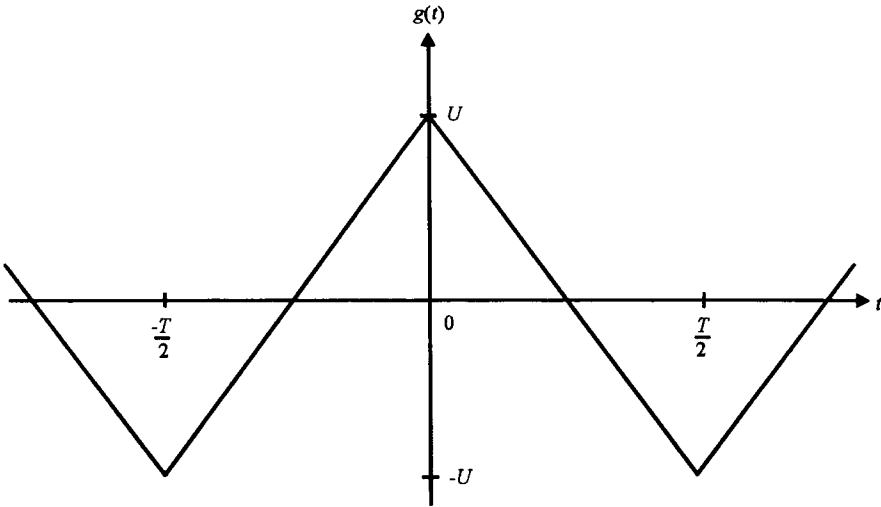
$$g(t) = \frac{4U}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

B.3 Fala prostokątna o dowolnym współczynniku wypełnienia



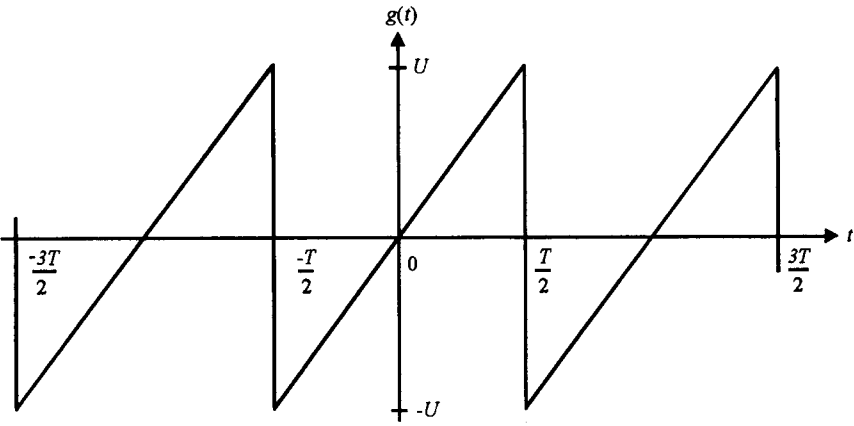
$$g(t) = \frac{2U}{\pi} \left[\frac{\tau}{4} + \sin\left(\frac{\tau}{2}\right) \cos \omega t + \frac{1}{2} \sin \tau \cos 2\omega t + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\tau}{2}\right) \cos 3\omega t + \dots \right]$$

B.4 Fala trójkątna

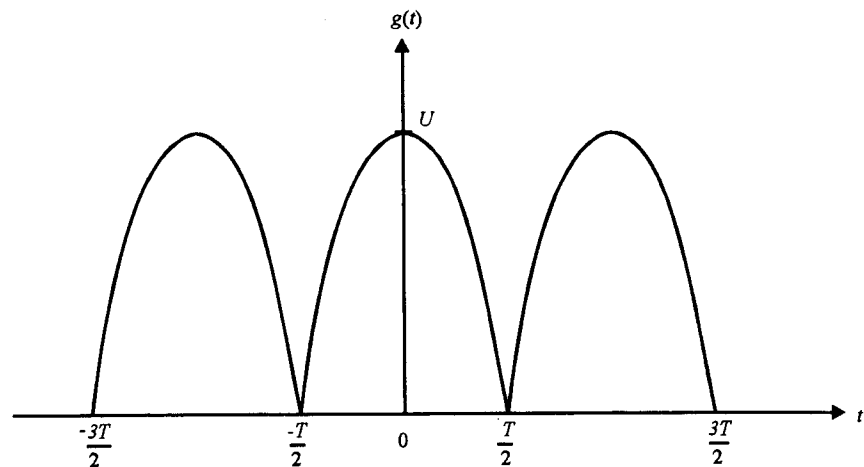


$$g(t) = \frac{8U}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega t + \dots \right)$$

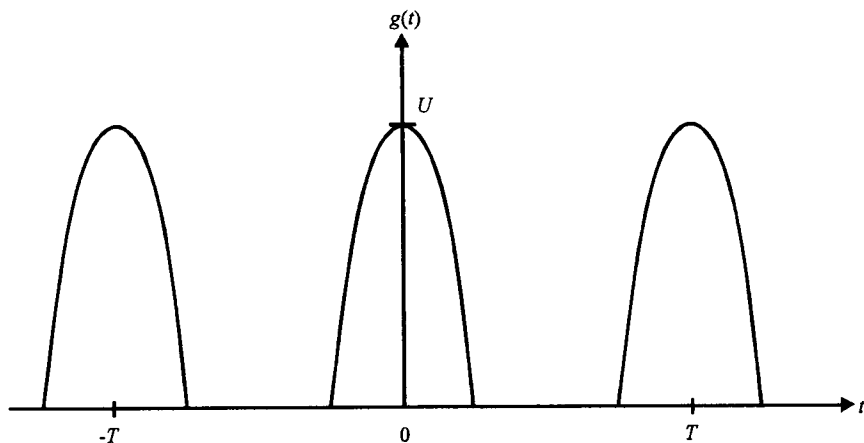
B.5 Fala piłowa



$$g(t) = \frac{2U}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \frac{1}{4} \sin 4\omega t + \dots \right)$$



$$g(t) = \frac{2U}{\pi} \left(1 + \frac{2 \cos 2\omega t}{1 \cdot 3} - \frac{2 \cos 4\omega t}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cos 6\omega t}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$



$$g(t) = \frac{U}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{2}{5 \cdot 3} \cos 4\omega t + \frac{2}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

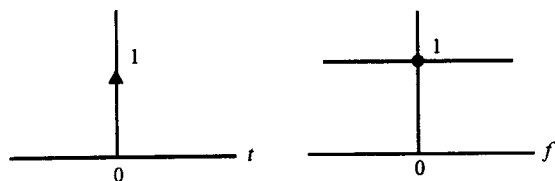
C.1 Ogólne właściwości

	$g(t)$	$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt$
C.1.1 Skalowanie	$g(t/T)$	$ T \cdot G(fT)$
C.1.2 Przesunięcie w czasie	$g(t-T)$	$G(f) e^{-j2\pi f T}$
C.1.3 Odwracalność	$G(t)$	$g(t-f)$
C.1.4 Mnożenie	$g(t) \cdot h(t)$	$G(f) \star H(f)$
C.1.5 Splot	$g(t) \star h(t)$	$G(f) \cdot H(f)$

C.2 Wybrane funkcje

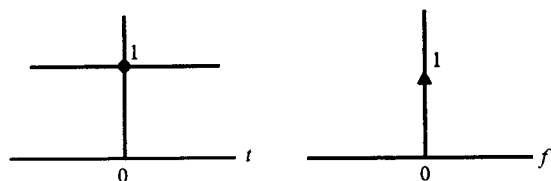
$$g(t) \quad G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

C.2.1 Funkcja delta



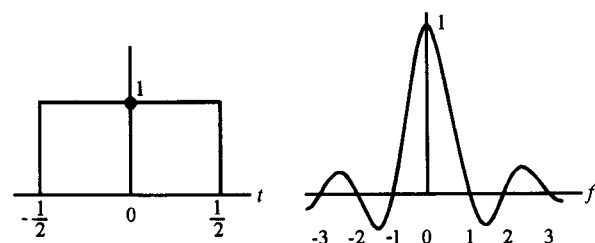
$$g(t) = \delta(t) \quad G(f) = 1$$

C.2.2 Funkcja stała



$$g(t) = 1 \quad G(f) = \delta(f)$$

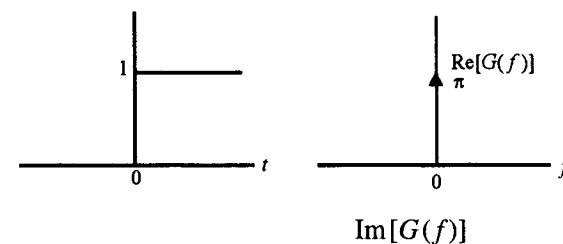
C.2.3 Funkcja prostokątna



$$\Pi(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2} \\ 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Sa}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

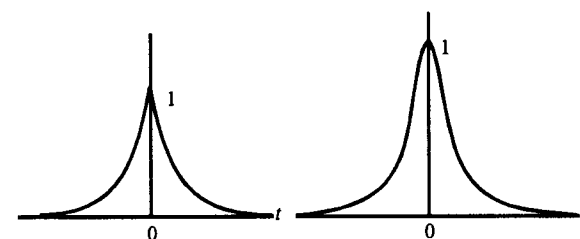
$$g(t) \quad G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

C.2.4 Skok jednostkowy



$$u(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad G(f) = \frac{1}{2} \delta(f) - \frac{j}{2\pi f}$$

C.2.5 Impuls wykładniczy



$$g(t) = e^{-|t|} \quad G(f) = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2}$$

C.2.6 Funkcja okresowa

$$\text{rep}_T[g(t)] + g(t) \star \text{rep}_T[\delta(t)] \quad G(f) \cdot \left| \frac{1}{T} \right| \text{rep}_{1/T} \delta(f)$$

C.2.7 Funkcja próbkująca

$$g(t) \cdot \text{rep}_T[\delta(t)] \quad G(f) \star \left| \frac{1}{T} \right| \text{rep}_{1/T} [\delta(f)]$$

D.1 $M = 0 \div 2,5$

M_1	$J_0(M)$	$J_1(M)$	$J_2(M)$	$J_3(M)$	$J_4(M)$	$J_5(M)$
0	1	0				
0,05	0,999	0,025				
0,1	0,998	0,05				
0,15	0,994	0,075				
0,2	0,99	0,1				
0,25	0,984	0,124	0,008			
0,3	0,978	0,148	0,011			
0,35	0,97	0,172	0,015			
0,40	0,96	0,196	0,02			
0,45	0,95	0,219	0,025			
0,5	0,938	0,242	0,031			
0,55	0,926	0,265	0,037			
0,6	0,912	0,287	0,044			
0,65	0,897	0,308	0,051			
0,7	0,881	0,329	0,059			
0,75	0,864	0,349	0,067	0,009		
0,8	0,846	0,369	0,076	0,01		
0,85	0,827	0,388	0,085	0,012		
0,9	0,808	0,406	0,095	0,014		
0,95	0,787	0,423	0,105	0,017		
1	0,765	0,44	0,115	0,02		
1,05	0,743	0,456	0,126	0,023		
1,1	0,72	0,471	0,137	0,026		
1,15	0,696	0,485	0,148	0,029		
1,2	0,671	0,498	0,159	0,033		
1,25	0,646	0,511	0,171	0,037		
1,3	0,62	0,522	0,183	0,041		
1,35	0,594	0,532	0,195	0,046		
1,4	0,567	0,542	0,207	0,05		
1,45	0,54	0,55	0,22	0,056	0,009	
1,5	0,512	0,558	0,232	0,061	0,01	
1,55	0,484	0,564	0,245	0,067	0,012	
1,6	0,455	0,57	0,257	0,073	0,013	
1,65	0,427	0,574	0,269	0,079	0,015	
1,7	0,398	0,578	0,282	0,085	0,017	

M_1	$J_0(M)$	$J_1(M)$	$J_2(M)$	$J_3(M)$	$J_4(M)$	$J_5(M)$
1,75	0,369	0,58	0,294	0,092	0,019	
1,8	0,34	0,582	0,306	0,099	0,021	
1,85	0,311	0,582	0,318	0,106	0,023	
1,9	0,282	0,581	0,33	0,113	0,026	
1,95	0,253	0,579	0,342	0,121	0,028	
2	0,2224	0,577	0,353	0,129	0,031	
2,05	0,195	0,573	0,364	0,137	0,034	
2,1	0,167	0,568	0,375	0,145	0,037	
2,15	0,1138	0,563	0,385	0,154	0,04	0,009
2,2	0,11	0,556	0,395	0,162	0,044	0,010
2,25	0,083	0,5548	0,405	0,171	0,048	0,011
2,3	0,056	0,554	0,414	0,18	0,052	0,012
2,35	0,029	0,53	0,423	0,189	0,056	0,013
2,4	0,003	0,52	0,431	0,198	0,06	0,015
2,45		0,509	0,439	0,207	0,064	0,016
2,5					0,069	0,018

D.2 $M = 0 \div 20$

M_1	$J_0(M)$	$J_1(M)$	$J_2(M)$	$J_3(M)$	$J_4(M)$	$J_5(M)$	$J_6(M)$
0	1						
1	0,765	0,44	0,115	0,02	0,003		
2	0,224	0,577	0,353	0,129	0,034	0,007	0,001
3	-0,26	0,339	0,486	0,309	0,132	0,043	0,011
4	-0,397	-0,066	0,364	0,43	0,281	0,132	0,049
5	-0,178	-0,328	0,047	0,365	0,391	0,261	0,131
6	0,151	-0,277	-0,243	0,115	0,358	0,362	0,246
7	0,3	-0,005	-0,301	-0,168	0,158	0,348	0,339
8	0,172	0,235	-0,113	-0,291	-0,105	0,186	0,338
9	-0,09	0,245	0,145	-0,181	-0,265	-0,055	0,204
10	-0,246	0,043	0,255	0,058	-0,22	-0,234	-0,014
11	-0,171	-0,177	0,139	0,227	-0,015	-0,238	-0,202
12	0,048	-0,223	-0,085	0,195	0,182	-0,073	-0,244
13	0,207	-0,07	-0,218	0,003	0,219	0,132	-0,118
14	0,171	0,133	-0,152	-0,177	0,076	0,22	0,081
15	-0,014	0,205	0,042	-0,194	-0,119	0,13	0,206
16	-0,175	0,09	0,186	-0,044	-0,203	-0,057	0,167
17	-0,17	-0,098	0,158	0,135	-0,111	-0,187	0,007
18	-0,013	-0,188	-0,008	0,186	0,07	-0,155	-0,156
19	0,147	-0,106	-0,158	0,072	0,181	0,004	-0,179
20	0,167	0,067	-0,16	-0,099	0,131	0,151	-0,055

M_1	$J_7(M)$	$J_8(M)$	$J_9(M)$	$J_{10}(M)$	$J_{11}(M)$	$J_{12}(M)$
1						
2						
3	0,003					
4	0,015	0,04				
5	0,053	0,018	0,006			
6	0,13	0,057	0,021	0,007		
7	0,234	0,128	0,059	0,024	0,008	0,003
8	0,321	0,223	0,126	0,061	0,026	0,01
9	0,327	0,305	0,215	0,125	0,062	0,027
10	0,217	0,318	0,292	0,207	0,123	0,063
11	0,018	0,225	0,309	0,28	0,201	0,122
12	-0,17	0,045	0,23	0,3	0,27	0,195
13	-0,241	-0,141	0,067	0,234	0,293	0,262
14	-0,151	-0,232	-0,114	0,085	0,236	0,285
15	0,034	-0,174	-0,22	-0,09	0,1	0,237
16	0,183	-0,007	-0,19	-0,206	-0,068	0,112
17	0,188	0,154	-0,043	-0,199	-0,191	-0,049
18	0,051	0,196	0,123	-0,073	-0,204	-0,176
19	-0,116	0,093	0,195	0,092	-0,098	0,205
20	-0,184	-0,074	0,125	0,186	0,061	-0,119

M_1	$J_{13}(M)$	$J_{14}(M)$	$J_{15}(M)$	$J_{16}(M)$	$J_{17}(M)$	$J_{18}(M)$
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8	0,003					
9	0,011	0,004				
10	0,029	0,012	0,005			
11	0,064	0,03	0,013	0,005		
12	0,12	0,065	0,032	0,014	0,006	
13	0,19	0,119	0,066	0,033	0,015	0,006
14	0,254	0,186	0,117	0,066	0,034	0,016
15	0,279	0,246	0,181	0,116	0,067	0,035
16	0,237	0,272	0,24	0,177	0,115	0,067
17	0,123	0,236	0,267	0,234	0,174	0,114
18	-0,031	0,132	0,236	0,261	0,229	0,171
19	0,161	0,015	0,139	0,234	0,256	0,224
20	-0,204	-0,146		0,145	0,233	0,251

M	$J_{19}(M)$	$J_{20}(M)$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14	0,007	
15	0,017	0,007
16	0,035	0,017
17	0,067	0,036
18	0,113	0,067
19	0,168	0,112
20	0,219	0,165

Dodatek E NORMALNA FUNKCJA BŁĘDU

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

x	0	1	2	3	4
0	0	0,011283	0,022565	0,033841	0,045111
0,1	0,112463	0,123623	0,134758	0,145867	0,156947
0,2	0,222703	0,233522	0,244296	0,255023	0,2657
0,3	0,328627	0,338908	0,349126	0,359279	0,369365
0,4	0,428392	0,437969	0,447468	0,456887	0,466225
0,5	0,5205	0,529244	0,537899	0,546464	0,554939
0,6	0,603856	0,611681	0,619411	0,627046	0,634586
0,7	0,677801	0,684666	0,691433	0,698104	0,704678
0,8	0,742101	0,748003	0,753811	0,759524	0,765143
0,9	0,796908	0,801883	0,806760	0,811564	0,816271
1	0,842701	0,84681	0,850838	0,854784	0,85865
1,1	0,880205	0,883533	0,886788	0,889971	0,893082
1,2	0,910314	0,912956	0,915534	0,91805	0,920505
1,3	0,934008	0,936063	0,938065	0,940015	0,941914
1,4	0,952285	0,953852	0,955376	0,956857	0,958297
1,5	0,966105	0,967277	0,968413	0,969516	0,970586
1,6	0,976348	0,977207	0,978038	0,978843	0,979622
1,7	98379	0,984407	0,985003	0,985578	0,986135
1,8	0,989091	0,989525	0,989943	0,990347	0,990736
1,9	0,99279	0,99309	0,993378	0,993656	0,993923
2	0,995322	0,995525	0,995719	0,995906	0,996086
2,1	0,997021	0,997155	0,997284	0,997407	0,997525
2,2	0,998137	0,998224	0,998388	0,998538	0,998664
2,3	0,998857	0,998912	0,999066	0,999216	0,999365
2,4	0,99931	0,999346	0,999379	0,999411	0,999441
2,5	0,999593	0,999614	0,999635	0,999654	0,999672
2,6	0,999764	0,999777	0,999789	0,9998	0,999811
2,7	0,999866	0,999873	0,99988	0,999887	0,999893

x	0	1	2	3	4
2,8	0,999925	0,999929	0,999933	0,999937	0,999941
2,9	0,999959	0,999961	0,999964	0,999966	0,999968
3	0,99997791	0,99997926	0,99998053	0,99998173	0,99998286
3,1	0,99998835	0,99998908	0,99998977	0,99999042	0,99999103
3,2	0,99999397	0,99999436	0,99999473	0,99999507	0,9999954
3,3	0,99999694	0,99999715	0,99999734	0,99999751	0,99999768
3,4	0,99999848	0,99999858	0,99999868	0,99999877	0,99999885
3,5	0,99999926	0,99999931	0,99999936	0,9999994	0,99999945
3,6	0,99999964	0,99999967	0,99999969	0,99999972	0,99999974
3,7	0,99999983	0,99999985	0,99999986	0,99999987	0,99999988
3,8	0,99999992	0,99999993	0,99999993	0,99999994	0,99999994
3,9	0,99999997	0,99999997	0,99999997	0,99999997	0,99999997
4	0,99999998	0,99999999	0,99999999	0,99999999	0,99999999

x	5	6	7	8	9
2,5	0,999689	0,999706	0,999722	0,999736	0,999751
2,6	0,999822	0,999831	0,999841	0,999849	0,999858
2,7	0,999899	0,999905	0,99991	0,999916	0,99992
2,8	0,999944	0,999948	0,999951	0,999954	0,999956
2,9	0,99997	0,999972	0,999973	0,999975	0,999976
3	0,99998392	0,99998492	0,99998586	0,99998674	0,99998757
3,1	0,9999916	0,99999214	0,99999264	0,99999311	0,99999356
3,2	0,9999957	0,99999598	0,99999624	0,99999649	0,99999672
3,3	0,99999784	0,99999798	0,99999812	0,99999825	0,99999837
3,4	0,99999893	0,99999901	0,99999908	0,99999914	0,9999992
3,5	0,99999948	0,99999952	0,99999956	0,99999959	0,99999962
3,6	0,99999976	0,99999977	0,99999979	0,99999981	0,99999982
3,7	0,99999989	0,99999989	0,9999999	0,99999991	0,99999992
3,8	0,99999995	0,99999995	0,99999996	0,99999996	0,99999996
3,9	0,99999998	0,99999998	0,99999998	0,99999998	0,99999998
4	0,99999999	0,99999999	0,99999999	0,99999999	0,99999999

x	5	6	7	8	9
0	0,056372	0,067622	0,078858	0,090078	0,101281
0,1	0,167996	0,179012	0,189992	0,200936	0,21184
0,2	0,276326	0,2869	0,297418	0,30788	0,318283
0,3	0,379382	0,38933	0,399206	0,409009	0,418739
0,4	0,475482	0,484655	0,493745	0,50275	0,511668
0,5	0,563323	0,571616	0,579816	0,587923	0,595936
0,6	0,642029	0,649377	0,656628	0,663782	0,67084
0,7	0,711156	0,717537	0,723822	0,73001	0,736103
0,8	0,770668	0,7761	0,78144	0,786687	0,791843
0,9	0,820891	0,825424	0,82987	0,834232	0,838508
1	0,862436	0,866144	0,869773	0,873326	0,876803
1,1	0,896124	0,899096	0,902	0,904837	0,907608
1,2	0,9229	0,925236	0,927514	0,929734	0,931899
1,3	0,943762	0,945561	0,947312	0,949016	0,950673
1,4	0,959695	0,961054	0,962373	0,963654	0,964898
1,5	0,971623	0,972628	0,973603	0,974547	0,975462
1,6	0,980376	0,981105	0,98181	0,982493	0,983153
1,7	0,986672	0,98719	0,987691	0,988174	0,988641
1,8	0,991111	0,991472	0,991821	0,992156	0,992479
1,9	0,994179	0,994426	0,994664	0,994892	0,995111
2	0,996258	0,996423	0,996582	0,996734	0,99688
2,1	0,997639	0,997747	0,997851	0,997951	0,998046
2,2	0,998537	0,998607	0,998674	0,998738	0,998799
2,3	0,999111	0,999155	0,999197	0,999237	0,999275
2,4	0,999469	0,999497	0,999526	0,999547	0,999571

interferencja, 69
– międzysymbolowa (ISI), 129, 131, 163

jitter, 130, 132

kanal, 16
– o ograniczonym pasmie, 127
kluczowanie, 163
– binarne FSK, 165
– z przesuwem amplitudy (ASK), 163
– – – częstotliwości (FSK), 165
– – – fazy (PSK), 167
– – – – różnicowe (DPSK), 168
– – przerywaniem fali nośnej (OOK), 163
kod impulsu, 143
koder źródła, 16
kompandacja, 158
konstelacja sygnałowa, 170, 172
korekcja, 158
korektor, 133
kryterium Nyquista, 54

mieszanie częstotliwości, 97
mikrofałe, 14
moc szumu, 68, 80
– – dysponowalna, 69, 80
modem, 163
modulacja, 21, 91
– amplitudy (AM), 91
– – kwadraturowa (QAM), 172
– – impulsów (PAM), 143
– cyfrowa, 162
– częstotliwości (FM), 92, 108, 122
– – bezpośrednia, 115
– – pośrednia, 115
– dwuwstęgowa DSBSC, 102
– fazy (PM), 92, 106
– impulsowo-kodowa (PCM), 141, 144
– jednowstęgowa (SSB), 106, 122
– kąta, 92, 106
– liniowa, 97
– nieliniowa, 97
– wąskopasmowa FM, 113
– zrównoważona, 102

modulator Cowana, 103
– grupowy, 117
– kwadratowy, 97
– liniowy, 97
– pierścieniowy, 104
multiplexer, 141

nadajnik, 16

odbiornik, 16
odczep, 57
odbiornik PCM, 154
– niekoherentny FSK, 167
odpowiedź czasowa filtru, 128
– impulsowa, 134
oscylator sterowany napięciem (VCO), 115

pasmo ochronne (filtru), 117
– podstawowe, 20, 92
– przepustowe, 48
pilot, 105
pojemność kanału, 140
poziom kwantowania, 143
prawdopodobieństwo ogona funkcji PDF, 138
prawo-A (kompresji), 159
prawo- μ (kompresji), 159
próbkiowanie, 52, 53
przetwornik analogowo-cyfrowy (A/D), 16, 52, 54, 141, 143, 147
przetwornik cyfrowo-analogowy (D/A), 54, 143, 147
przesłuch, 67, 141
przetwornik, 11, 16
przyleganie (clipping), 101

radar, 14
reguła Carsona, 113
rozszerzenie pasma, 123

sieć telekomunikacji osobistej (PCN), 15
skuteczna temperatura szumów, 76, 79
słowo kodowe, 12
splot, 41, 129

aliasing, 53, 93, 128

bit, 16
bitowa stopa błędu (BER), 138, 139, 140, 173, 174, 175
błąd kwantowania, 147
– średniokwadratowy, 150
charakterystyka amplitudowa, 49
ciąg liczbowy, 54
cyfrowe przetwarzanie sygnałów (CPS), 52
częstotliwość, 20
– boczna, 92
– podstawowa, 22
– próbkowania, 54, 157
– zegara, 131
decybel (dB), 81
delta-funkcja (Diraca), 21, 129
demodulacja AM, 100
demodulator grupowy, 117
– FM, 115
detekcja koherentna, 105, 120, 173
– niekoherentna, 174
– obwiedni, 100, 118, 120, 123, 165, 167
dewiacja częstotliwości, 107, 109
– fazy, 107
dwubit, 140
efekt progowy, 118
fala nośna, 91
– piłowa, 185
– prostokątna, 184
– trójkątna, 185
filtr aktywny, 50
– analogowy, 48
– cyfrowy, 57
– dolnoprzepustowy, 49
– górnoprzepustowy, 49
– NOI, 59
– odtwarzający, 144
– pasmowoprzepustowy, 49
– pasmowozaporowy, 49
– pasywny, 50
– SOI, 57, 59
funkcja błędu, 138, 193
– gaussowska, 68
– gęstości prawdopodobieństwa (PDF), 136
– – – gaussowska, 137
– nieparzysta, 29
– parzysta, 28
– Π , 47
– pseudonieparzysta, 30
– S_a , 32
funkcje Bessela, 111, 190
głębokość modulacji, 93
grupa podstawowa, 117
harmoniczna, 23
hierarchia cyfrowa, 162
impuls Diraca (zob. delta-funkcja)

- sprężenie zwrotne, 59
- w przód, 59
- stosunek sygnał-szum (S/N), 81, 119, 140, 174
- – systemu PCM, 154
- suma splotowa, 57
- sygnalizacja we wspólnym kanale, 144
- sygnał, 11
- AM, 92
- analogowy, 16
- cyfrowy, 16
- informacyjny, 16, 91
- modulujący, 92
- nieokresowy, 22
- okresowy, 22
- ortogonalny, 171
- wybierający, 144
- zerujący, 141
- synchronizacja decyzyjna, 131
- system kwadraturowy (QPSK), 170, 171
- M-wartościowy, 169
- telekomunikacyjny, 15
- szereg Fouriera, 22, 183
- szerokość pasma, 20, 68
- transmisji, 122
- symbol, 128
- szybkość bitowa, 140
- Nyquista, 128
- symbolowa, 140
- transmisji, 140
- szum, 16, 67
- AWGN (addytywny, biały, gaussowski), 71
- atmosferyczny (statyczny), 68, 78
- biały (Johnsona), 71
- gaussowski, 136
- kosmiczny, 68, 78
- kwantowania, 150
- kwantowy, 78
- termiczny, 68
- migotania (różowy, $1/f$), 76
- nieba, 79
- słoneczny, 78
- śrutowy, 73
- wewnętrzny, 79
- zewnętrzny, 79
- ziemski, 78
- telekomunikacja, 11
- cyfrowa, 128
- nośna, 117
- tłumienie, 13
- transformata Fouriera, 22, 30, 187
- odwrotna, 40
- telewizja (TV), 13
- twierdzenie Shannona o pojemności kanału, 140
- wartość skuteczna, 70
- średniokwadratowa, 70
- – sygnału, 151
- – szumu, 151
- widmo, 20
- dwustronne, 22
- dyskretne, 22
- jednostronne, 22
- prążkowe, 22
- widmowa gęstość mocy (PSD), 70
- wzór Frii, 86,
- wskaźnik dewiacji, 109
- modulacji, 109
- współczynnik poprawy FM, 122
- szumów, 84
- wykres oczkowy, 131
- wskazowy, 107
- zakłócenia międzykanałowe, 67
- zasada dualności, 33
- odwracalności, 33
- superpozycji, 27
- zegar, 141
- zwielokrotnianie z podziałem czasowym (TDM), 125, 141
- – częstotliwościowym (FDM), 116, 125